

Християн Стоянов – Записки по “Основи на Фурие оптиката”

Записки
към курса по
Основи на Фурие Оптиката

Християн Ю. Стоянов

София, 2006

СЪДЪРЖАНИЕ

1. УВОД

- 1.1 Предмет на Фурие оптиката
- 1.2 Основни понятия
 - 1.2.1 Монохроматична вълна
 - 1.2.2 Основна задача на Фурие оптиката
 - 1.2.3 Оптична вълна с пространствена модулация
 - 1.2.4 Преобразуване на Фурие
 - 1.2.5 Условие за съществуване на ФП
 - 1.2.6 Физичен смисъл на ФП
 - 1.2.7 Основни свойства на ФП
 - 1.2.8 Някои често използвани функции във Фурие оптиката и техните преобразувания
 - 1.2.9 Конволюция
 - 1.2.10 Взаимна корелация на две функции
 - 1.2.11 Импулсен символ (“делта – функция” на Дирак)

2. Линеен системи

- 2.1 Определение на система
- 2.2 Каскадни системи
- 2.3 Линеен системи. Интеграл на суперпозиция
- 2.4 Инвариантни линеен системи. Предавателна функция
- 2.5 Честотна характеристика на каскадна система
- 2.6 Система с ограничен спектър. Теорема за дискретизацията
- 2.7 Теорема за дискретизацията (теорема на Уитакър – Шенън)

3. Скаларна теория на дифракцията на светлината. Приложение при оптичните линеен, пространствено инвариантни системи

- 3.1. Решение на вълновото уравнение за плоска монохроматична вълна
- 3.2 Ъглов спектър и неговия физичен смисъл
- 3.3 Влияние на апертура върху ъгловия спектър на вълната
- 3.4 Разпространението на вълна в светлината на линеен пространствен филтър
- 3.5 Дифракция на Френел и Фраунхофер в светлината на теорията на линеенните системи
 - 3.5.1 Приближение на Френел
 - 3.5.1 Приближение на Фраунхофер
 - 3.5.2 Дифракция на Фраунхофер за някои специални случаи
 - 3.5.3 Синусоидална амплитудна решетка
 - 3.5.4 Кръгъл отвор

4. Фурие преобразуване в оптичните системи. Лещата като елемент, изпълняващ ФП и елемент, създаващ на образ

- 4.1 Тънка леща като фазов елемент
- 4.2 Лещата като елемент, осъществяващ преобразуване на Фурие
- 4.3 Лещата като елемент, създаващ на образ

- А). Условие за формиране на образ*
- Б). Операторен метод за пресмятане на оптични системи*
- В). Свойства на оператора на разпространение $\psi(x, y; p)$:*
- Г). Изобразяване с идеална оптична система с неограничена апертура*
- Д). Изобразяване с дифракционно ограничена система с крайна апертура*

Вместо предговор

Настоящите *Записки* са само набързо нахвърляни бележки върху материала от лекциите и имат за цел да помогнат на онези студенти, които не успяват да си водят собствени записки. По тази причина те са лишени от всякакви претенции за изчерпателност, чистота на езика и дълбочина на обяснението. Най-вероятно, с хода на времето, те ще бъдат преработвани и допълвани. И с чувство на благодарност ще приема всяка критика, препоръка или напомняне за направени грешки.

Хр. Стоянов

1.0 УВОД

1.1 Предмет на Фурие оптиката

Фурие оптиката е от оптиката, който изучава процесите на разпространение и преобразуване на светлинни електромагнитни вълни при преминаването им през оптични среди или системи с помощта на *интегралните преобразувания*, най-вече на *преобразуването на Фурие* (ФП). Например, със средствата на Фурие оптиката (ФО) е намерено добро обяснение на проблемите, свързани с оптичното изобразяване. С този процес е свързан също така и особено важния въпросът за *обективната* оценка на качеството на образа, създаден от оптична система.

Оптични системи се разглеждат основно като средство за предаване и съхранение на информация. Понятието “система” е пренесено от по-рано развитата теория за съобщенията. Там информацията има основно времеви характер. При системите, създаващи образ на даден предмет, информацията, макар и носена от трептения с много висока честота, има предимно пространствен характер, тъй като на комплексната амплитуда на полето, а от там и на интензитета, на светлината им е присъщо пространственото разпределение. В процеса на развитие на този дял от оптиката се оказва, че съществува дълбока връзка между системите за съобщение в радиотехниката и оптичните системи за изобразяване. И тази връзка се състои в това, че двете области на познание почиват върху идентични математически основи – *Фурие анализа и теорията на линейните системи*. Както на електронните системи, така и на оптичните системи са присъщи някои фундаментални свойства, като *линейност* и *инвариантност*. По тази причина всеки електронен или оптичен уред, притежаващ горните свойства, може да бъде описан и изследван с методите на *честотния анализ*. Така както един нискочестотен усилвател се описва с времевата му амплитудно – честотна характеристика, така и система за изобразяване се описва най-добре с нейната пространствено – честотна характеристика. По тази причина оптичните системи най-често се разглеждат като пространствени филтри.

Множество примери подкрепят аналогията между електронни и оптични системи, а също и казаното по-горе. Например, подобряването на контраста на образа е процес, аналогичен на филтрацията в радиоелектрониката, оптичната леща е аналог на генератор на модулирани трептения с линейно изменение на честотата, и др.

1.2 Основни понятия

1.2.1 Монохроматична вълна

В настоящия курс ще бъдат разглеждани вълни с висока степен на пространствена кохерентност μ_{12} (виж теоремата на Ван Цитерт – Цернике), т.е., фазовата разлика между трептенията в две точки от полето е стационарна за достатъчно дълъг период от време (достатъчно, за едно наблюдение или измерване). Реалната амплитуда на такава вълна

$$U = \mathbf{u}_0 \cos(2\pi vt + \varphi) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{u}_0 \exp \left[i(2\pi vt + \varphi) \right] \right]$$

се представя най-често в комплексен вид

$$U = \mathbf{u}_0 \exp(i\varphi) \exp(i2\pi vt) = U_0 \exp(i2\pi vt) \quad /1.1/$$

където с $U_0 = \mathbf{u}_0 \exp(i\varphi)$ е означена комплексната амплитуда на полето. Обикновено в дадена равнина с координатна система (x, y) , фазовият член не е постоянен, а има някакво разпределение $\varphi = \varphi(x, y)$

1.2.2 Основна задача на Фурие оптиката

Ако е известно разпределението на комплексната амплитуда на полето в дадена равнина, да се намери разпределението на амплитудата в друга равнина, след преминаване (трансформацията) на вълната през хомогенна среда, оптичен елемент, холограма и др.

1.2.3 Оптична вълна с пространствена модулация

Сигналите в радиотехниката, които имат времева природа, могат да бъдат представени с техните честотни спектри. За оптичните сигнали е характерно пространственото разпределение на амплитудата и фазата, а от там, и на интензитета. По аналогия с времевите сигнали, които могат да бъдат разглеждани и във времето и във време – честотната област, оптичните сигнали с пространствена модулация могат да бъдат изследвани както в пространствена координатна система, така и в пространствено – честотната област. Преходът между двете области се осъществява с двумерно Фурие преобразуване (ФП).

1.2.4 Преобразуване на Фурие

Правото ФП ще записваме във вида

$$F(u, v) = FT \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad /1.2/$$

а обратното ФП ще записваме във вида

$$f(x, y) = FT^{-1} \{ F(u, v) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)] du dv \quad /1.3/$$

или в по-компактната форма

$$f(x, y) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} F(u, v) \quad /1.4/$$

Комплексната функция $F(u, v)$ от реално променливи (u, v) се нарича *комплексен Фурие спектър* на Фурие предмета $f(x, y)$. Тя има вида

$$F(u, v) = |F(u, v)| \exp[i\varphi(u, v)] \quad /1.5/$$

$$\varphi(u, v) = \arg[F(u, v)]$$

$|F(u, v)|$ се нарича амплитуден спектър, а $\varphi(u, v) = \arg[F(u, v)]$ - фазов спектър.

1.2.5 Условие за съществуване на ФП

Необходимите условия за съществуване на Фурие образ на функцията $f(x, y)$ са:

1. Функцията $f(x, y)$ да бъде абсолютно интегрируема в равнината (x, y) ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$$

2. Функцията $f(x, y)$ да има краен брой точки на прекъсване от първи род, в които е изпълнено условието на Дирихле, т.е. стойността на функцията в точка на прекъсване x_0 да бъде

$$f(x)|_{x=x_0} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0 - \varepsilon} f(x)|_{x < x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0 + \varepsilon} f(x)|_{x > x_0} \right]$$

3. Функцията $f(x, y)$ да има краен брой екстремуми в произволен правоъгълник от равнината (x, y) и да няма точки на прекъсване от втори род.

При анализа на оптичните системи често пъти се налага реалната, естествена форма на вълните, за които част от горните условия са неизпълними, да бъде изразена с помощта на идеализирани математически функции. Например, хармоничният сигнал не е стандартен Фурие предмет – той не е абсолютно интегрируем. Неговият обобщен Фурие образ се описва с Дирковия импулсен символ $\delta(u, v)$. Тази обобщена функция може да бъде онагледена като граница на някои функции, например

$$\delta(u, v) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi(u^2 + v^2)]$$

но в действителност математически се дефинира със своето поведение – като функционал

$$f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - a, y - b) dx dy$$

(виж книгата на Лоран Щварц, *Анализ*, т1. и т.2).

1.2.6 Физичен смисъл на ФП

От дефиницията на ФП следва, че ако искаме да определим стойността на спектъра $F(u, v)$ в дадена точка (u, v) , то трябва да познаваме функцията $f(x, y)$ в неограничения интервал. Това противоречи на представите за реалния физичен свят. От тук следва, че не можем да знаем функцията $F(u, v)$ с абсолютна точност. Обратно, ако искаме да изчислим предмета $f(x, y)$, то трябва да разполагаме с безкраен брой точки в честотната област. И в двата случая намира израз принципа за неопределеност – познанието на заобикалящия ни свят е възможно само в условията на “неточното” му описание. От оптическа гледна точка това означава, че много фини детайли могат да бъдат “видени” само през много широка апертура.

1.2.7 Основни свойства на ФП

1. Линеиност

$$FT\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} = a_1 FT\{f_1\} + a_2 FT\{f_2\}$$

2. Теорема за отместването

Ако $f(x, y) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} F(u, v)$, то

$$f(x-a, y-b) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} F(u, v) \exp[-2\pi i(ua + vb)]$$

и обратно

$$f(x, y) \exp[2\pi i(ua + vb)] \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} F(u-a, v-b)$$

Отместване в пространствената област води до линейно отместване на фазата в честотната област.

3. Теорема за мащаба

$$f(ax, by) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right).$$

При $a = b = -1$ се постига инверсия $f(-x, -y) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} F(-u, -v)$.

Малък по размери обект притежава широк пространствен спектър, и обратно.

Фурие образ на комплексно спрегнат предмет

$$f^*(\pm x, \pm y) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} F^*(\mp u, \mp v)$$

и обратно

$$F^*(u, v) \xleftrightarrow[FT]{FT^{-1}} f^*(-x, -y)$$

От където следва, че, ако предметната функция е реална и четна, то

$$f(x, y) = f(-x, -y), \text{ то } F(u, v) = F(-u, -v) \text{ и } F(u, v) = F^*(u, v).$$

Теорема на Рейли

От закона за запазване на енергията следва, че тя е постоянна, независимо от начина на разглеждане на сигнала. С други думи, Фурие предмета и неговият образ са равно мощни.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 du dv$$

Тази теорема се нарича още теорема на Рейли – Парсевал и е частен случай на теоремата на Парсевал

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) g^*(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) G^*(u, v) du dv ,$$

която ще бъде доказана по-долу.

Доказателство: виж Гудмен (приложения), Папулис, (чрез теоремата за конволюция), стр. 100.

Интегрална теорема на Фурие

Във всяка точка, в която функцията $f(x, y)$ е непрекъсната, важи, че

$$FT \{ FT^{-1} \{ f(x, y) \} \} = FT^{-1} \{ FT \{ f(x, y) \} \} = f(x, y)$$

Във всяка точка на прекъсване на функцията $f(x, y)$ две последователни ФП дават средната стойност на величината на $f(x, y)$ в околността на тази точка. Или, прилагайки правото и обратно преобразуване върху функцията $f(x, y)$, получаваме същата функция, с изключение на точките на прекъсване.

Доказателство: виж Гудмен (приложения).

1.2.8 Някои често използвани функции във Фурие оптиката и техните преобразувания

а). Функции с разделящи се променливи

Нека $f(x, y)$ е функция от две независими променливи. Ако е изпълнено

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y),$$

казваме че функцията е с разделящи се променливи. Това свойство може да се наблюдава при представяне на функционалната зависимост в произволна координатна система. Например в полярни координати

$$f(r, \theta) = f_r(r) f_\theta(\theta).$$

Фурие образа на функция с разделящи се променливи е равен на произведението на образите на съставните функции. Доказателството е тривиално:

$$\begin{aligned} FT\{f(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \exp[-i2\pi ux] dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) \exp[-i2\pi vy] dy = \\ &= F_1(u) F_2(v) \end{aligned}$$

б). Някои често използвани едномерни функции

1. Прозоречната функция се дефинира като

$$rect(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases}$$

2. Знаковата функция се дефинира като

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

3. sinc(x) = $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$

4. Триъгълната функция се дефинира като

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

5. Гребеновидната функция (на Дирак) се дефинира като

$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - n)$$

6. Кръговата прозоречна функция, която единствено от изброените зависи от две променливи, се дефинира като

$$circ(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Фурие образите на тези прости, но полезни при моделиране на оптични обекти, функции са

$$\begin{aligned} \text{rect}(x)\text{rect}(y) &\xrightarrow{FT} \text{sinc}(u)\text{sinc}(v) \\ \Lambda(x)\Lambda(y) &\xrightarrow{FT} \text{sinc}^2(u)\text{sinc}^2(v) \\ \text{sgn}(x)\text{sgn}(y) &\xrightarrow{FT} \frac{1}{i\pi u} \cdot \frac{1}{i\pi v} \\ \exp\left[-\pi(x^2 + y^2)\right] &\xrightarrow{FT} \exp\left[-\pi(u^2 + v^2)\right] \\ \text{comb}(x)\text{comb}(y) &\xrightarrow{FT} \text{comb}(u)\text{comb}(v) \end{aligned}$$

Определянето на Фурие образа на функцията с централна симетрия не е така лесно, както при елементарните функции и ще бъде изведен по-късно.

1.2.9 Конволюция

Двумерната конволюция на реалните функции, $f(x, y)$ и $g(x, y)$ от реалните променливи (x, y) , се дефинира като

$$f(x, y) ** g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) g(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

Основните свойства и смисълът на тази операция могат да бъдат демонстрирани най-просто върху едномерен случай, например, във време – честотната област.

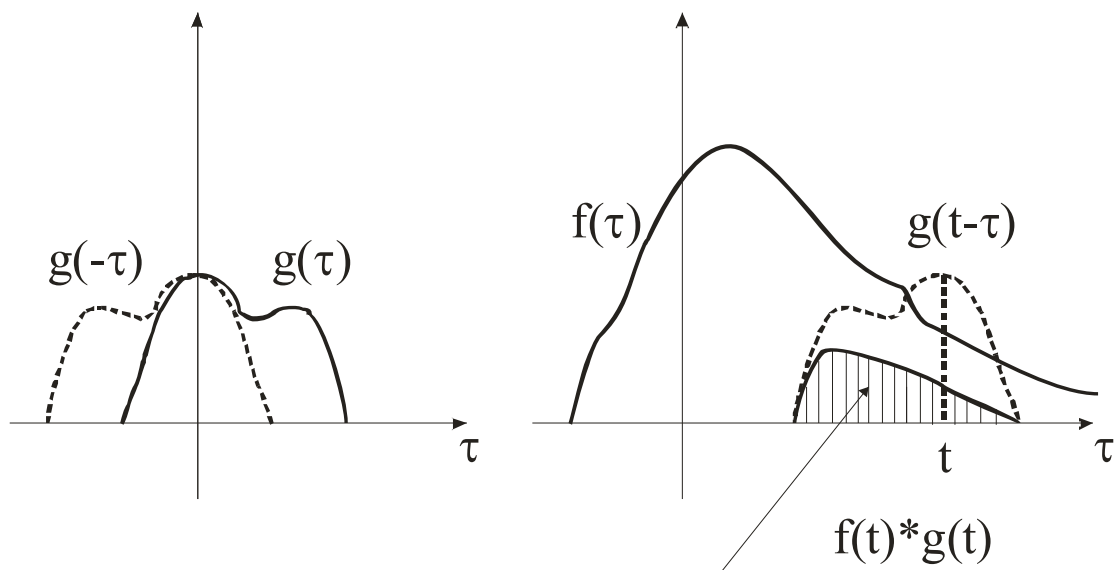
$$\begin{aligned} h(t) = f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{2} - \tau\right) g\left(\frac{t}{2} + \tau\right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{2} + \tau\right) g\left(\frac{t}{2} - \tau\right) d\tau \end{aligned}$$

което е резултат от проста замяна на променливите. От тук следват основните свойства на конволюцията – комутативност и асоциативност.

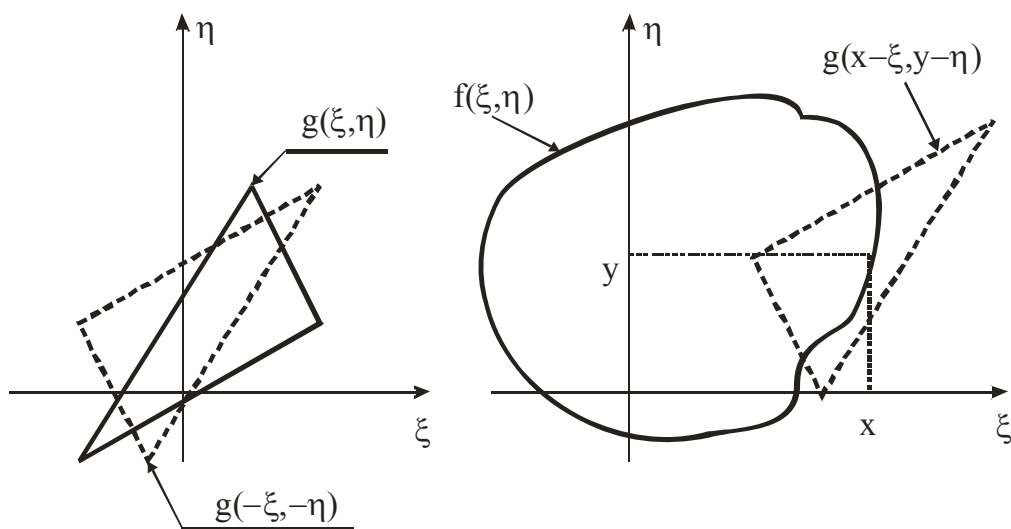
Асоциативност: $a(t) * [b(t) + c(t)] = [a(t) + b(t)] * c(t) = \dots$

Комутативност: $a(t) * b(t) * c(t) = a(t) * c(t) * b(t) = \dots$

Графическа илюстрация на операцията конволюция е показана на Фиг. 1.1. Площта под кривата, получена след умножението на сигнала $f(\tau)$ с огледалния образ $g(-\tau)$ на функцията $g(\tau)$, е стойността на конволюцията $h(t)$ за аргумента t . За да бъде определена цялата функция $h(t)$, променливата t трябва да обходи неограничения интервал. Аналогична е и интерпретацията на двумерния случай, графично изобразена на Фиг. 1.2.



Фиг. 1.1



Фиг. 1.2

Теорема за конволюцията

Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са стандартни Фурие предмети и техните образи са

$$\begin{aligned} f(x, y) &\xrightarrow{FT} F(u, v) \\ g(x, y) &\xrightarrow{FT} G(u, v) \end{aligned}$$

то Фурие образа на тяхната конволюция е произведението на образите на всяка от функциите.

$$f(x, y) ** g(x, y) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} F(u, v) \cdot G(u, v).$$

Доказателство: Ако

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(x, y) ** g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) g(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ FT\{h(x, y)\} &= FT\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) g(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) FT\{g(x - \xi, y - \eta)\} d\xi d\eta = \\ &= G(u, v) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \exp[-i2\pi(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta = F(u, v) G(u, v) \end{aligned}$$

Теоремата на Парсевал се доказва лесно, ако бъде разгледана като частен случай, при $x = y = 0$, на теоремата за конволюцията. Ако заместим в горния израз и заменим (x, y) с (ξ, η) , то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) g^*(\xi, \eta) d\xi d\eta &= FT\{f(\xi, \eta) g^*(\xi, \eta)\} \Big|_{u=v=0} = \\ &= F(u, v) ** G^*(-u, -v) \Big|_{u=v=0} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u', v') G^*[-(u - u'), -(v - v')] du' dv' \Big|_{u=v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) G^*(u, v) dudv \end{aligned}$$

1.2.10 Взаимна корелация на две функции

Нека функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ да имат съответно Фурие образи

$$\begin{aligned} f(x, y) &\xrightarrow{FT} F(u, v) \\ g(x, y) &\xrightarrow{FT} G(u, v) \end{aligned}$$

Взаимната корелация (интер-корелацията, крос – корелацията) на тези две функции се дефинира като

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta = \left. \begin{aligned} \xi - x &= \xi', d\xi = d\xi' \\ \eta - y &= \eta', d\eta = d\eta' \end{aligned} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x, \eta + y) g^*(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

(обърнете внимание на подредбата на аргументите във втората функция и сравнете с дефиницията за конволюция) или с помощта на конволюцията

$$h(x, y) = f(x, y) ** g^*(-x, -y).$$

Съгласно теоремата за конволюцията и от свойството на ФП, че, ако $f(x) \xrightarrow{FT} F(u)$, то тогава $f^*(x) \xrightarrow{FT} F^*(-u)$, следва

$$FT\{h(x, y)\} = FT\{f(x, y) ** g^*(-x, -y)\} = F(u, v)G(u, v).$$

При $f(x, y) = g(x, y)$ и за $x = y = 0$ можем да пишем, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) f^*(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) F^*(u, v) dudv$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 dudv$$

с което е доказана и теоремата а Рейли.

Когато $f(x, y) = g(x, y)$, взаимната корелацията преминава в авто-корелация и се записва като

$$h(x, y) = f(\xi, \eta) ** f^*(-\xi, -\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) f^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta.$$

Много често корелацията се обозначава със символа \otimes . Тогава

$$h(x, y) = f(\xi, \eta) \otimes f(\xi, \eta)$$

или

$$h(x, y) = f(\xi, \eta) \otimes \otimes g(\xi, \eta) \text{ за двумерния случай.}$$

Теорема за образа на авто-корелационната функция

Фурие образът на авто-корелацията на дадена функция е нейният мощностен спектър.

$$FT\{f(\xi, \eta) ** f^*(-\xi, -\eta)\} = |F(u, v)|^2 = F(u, v) F^*(u, v)$$

Доказателство: Ако $h(x, y) = f(\xi, \eta) \otimes f(\xi, \eta)$ и, тъй като

$$f^*(-\xi, -\eta) \xrightarrow{FT} F^*(u, v), \text{ то}$$

$$H(u, v) = F(u, v) F^*(u, v) = |F(u, v)|^2.$$

1.2.11 Импулсен символ (“делта – функция” на Дирак)

Едномерната функция на Дирак, известна от другите дисциплини, може да бъде дефинирана като граница на редица от импулси с монотонно намаляваща ширина и увеличаваща се височина и с единична площ. Математическият модел на тези импулси може да бъде различен, например,

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \exp(-N^2 \pi t^2)$$

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{rect}(Nt)$$

$$\delta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{sinc}(Nt)$$

Този подход е подходящ при описание на мощни светлинни или електрически импулси. В оптиката, аналогично на понятието импулс във времето, се използва точков източник или пространствен импулс с единична площ. Определението на импулсия символ в двумерното пространство е напълно аналогично:

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi (x^2 + y^2)]$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \operatorname{rect}(Nx) \operatorname{rect}(Ny)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \operatorname{sinc}(Nx) \operatorname{sinc}(Ny)$$

За всяко от трите определения импулсият символ има следните свойства:

$$1. \delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & (x, y) \neq 0 \end{cases}$$

$$2. \forall \varepsilon > 0: \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1, \text{ в частност } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1.$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = f(x, y) \text{ във всички точки, в които}$$

функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. Това свойство понякога се нарича *филтриращо свойство* на δ – функцията. То може да бъде записано и във вида

$$\delta(x, y) ** f(x, y) = f(x, y) ** \delta(x, y) = f(x, y), \text{ тъй като } \delta(x, y) \text{ е четна.}$$

Следователно, δ – функцията *има смисъла на единичен елемент при операцията конволюция*, както нулата при операциите събиране и изваждане, и единицата при операциите умножение и делене.

4. С помощта на някои от горните определения може да се докаже, че смяната на мащаба на променливите води до вида

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta(x, y) .$$

5. Импулсният символ е четна функция

$$\delta(-x, -y) = \delta(x, y) .$$

6. Транслацията на една функция може да се представи с конволюция

$$f(x-a, y-b) = f(x, y) ** \delta(x-a, y-b)$$

7. Фурие образ на импулсен символ

Нека $\delta(x, y) \xrightarrow{FT} \Delta(u, v)$. Тогава, прилагайки теоремата за Фурие образа на конволюцията, получаваме

$$FT\{f(x, y)\} = F(u, v) = FT\{f(x, y) ** \delta(x, y)\} = F(u, v) \Delta(u, v)$$

или

$$F(u, v) = F(u, v) \Delta(u, v)$$

$$\therefore FT\{\delta(x, y)\} = \Delta(u, v) = 1$$

Пример: Точков източник с координати (x_0, y_0) се моделира с функцията $\delta(x-x_0, y-y_0)$. Неговият комплексен спектър, съгласно теоремата за транслацията, е

$$\Delta(u, v)|_{x_0, y_0} = FT\{\delta(x-x_0, y-y_0)\} = \exp[2\pi i(ux_0 + vy_0)]$$

Следователно, амплитудният спектър на точков източник е непрекъснат и константен, $|\Delta(u, v)| = 1$, а фазовият спектър е равен на $\varphi(u, v) = 2\pi(ux_0 + vy_0)$. Вярно е и *обратното твърдение*

$$\delta(x-x_0, y-y_0) = FT^{-1}\{\Delta(u, v)|_{x_0, y_0}\} = FT^{-1}\{\exp[2\pi i(ux_0 + vy_0)]\} .$$

Доказателство: Намираме ФП на двете страни на свойство 6.

$$\begin{aligned} FT\{f(x-x_0, y-y_0)\} &= FT\{f(x, y) ** \delta(x-x_0, y-y_0)\} = \\ &= F(u, v) \exp[2\pi i(ux_0 + vy_0)] = F(u, v) \Delta(u, v)|_{x_0, y_0} \end{aligned}$$

Следователно,

$$\Delta(u, v)|_{x_0, y_0} = \exp[2\pi i(ux_0 + vy_0)] .$$

Това разпределение на комплексния Фурие има приложение при решаването на редица задачи от практически интерес. Например, как от поле с комплексен Фурие спектър $F(u, v)$ да бъде получена сферична вълна? Едно от възможните решенията е тази вълна да бъде пропусната през комплексен филтър със спектър на пропускане $G_F(u, v)$, такъв, че получения на изхода спектър да отговаря на този на точков източник $\delta(x - x_0, y - y_0)$. Следователно,

$$F(u, v)G_F(u, v) = FT\{\delta(x - x_0, y - y_0)\} = \Delta(u, v)|_{x_0, y_0} = \exp[2\pi i(ux_0 + vy_0)].$$

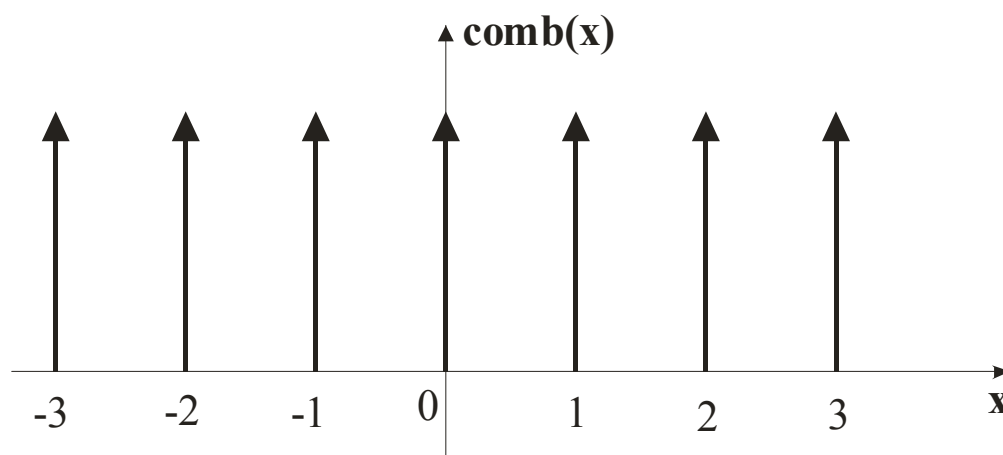
Спектърът на филтъра следва да бъде

$$G_F(u, v) = \frac{\Delta(u, v)|_{x_0, y_0}}{F(u, v)} = \frac{\exp[2\pi i(ux_0 + vy_0)]}{F(u, v)}.$$

8. Импулсният символ е функция с разделящи се променливи

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0).$$

9. Една често използвана и полезна за оптиката функция е *редът на Дирак*, показан на Фиг. 1.3, наричан още *гребеновидна функция*.



Фиг. 1.3

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - n) \text{ и}$$

$$\text{comb}(x)\text{comb}(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(x - n, y - m).$$

Съответните на тези функции Фурие преобразувания са

$$\text{comb}(x) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} \text{comb}(u)$$

$$\text{comb}(x)\text{comb}(y) \xrightleftharpoons[FT^{-1}]{FT} = \text{comb}(u)\text{comb}(v) .$$

Тези теореми се доказват лесно с ред на Фурие.

10. Умножение с константа

$$k\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = y = 0 \\ 0, & (x, y) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{и } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x, y) dx dy = k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = k .$$

При умножение на δ -функция с константата k се изменя единствено площта под нея и то, k – пъти.

2. Линеини системи

2.1 Определение на система

Понятието система означава физичен обект, който осъществява преобразуване на множество от входни величини в множество изходни величини.



Фиг. 2.1

Входните и изходни сигнали в оптичните системи, създаващи образ, могат да бъдат както реални (интензитет) така и комплексни величини (амплитуда на полето). Трансформациите на тези сигнали най-често се разглеждат на стъпки, от равнина към следваща равнина, и по тази причина в оптиката те се описват с функции на две променливи. В настоящия курс ще бъдат разглеждани стационарни *детерминирани* (неслучайни) системи. Това означава *постоянна във времето еднозначност на преобразуването*, или с други думи, определен входен сигнал, независимо в кой момент е попаднал на входа на системата, води до появата на един и същ изходен сигнал. Обратното не всякога е вярно, т.е., че на всеки изходен сигнал отговаря единствен входен сигнал. Причината за това е, че съществуват множество функции, които не създават сигнал на изхода.

Нека в множеството S_1 да съществува набор входни функции $f_1(x_1, y_1)$ и нека върху това множество да са определени аритметичните операции събиране $(f_1^{(1)} + f_1^{(2)})$ и умножение с константа af_1 . Работата на системата се описва с оператора $\varphi\{ \}$, който изобразява елементите от множеството входни сигнали S_1 в множеството S_2 , чиито елементи са съответните изходни сигнали.

$$f_2(x_2, y_2) = \varphi\{f_1(x_1, y_1)\}, \quad /2.1/$$

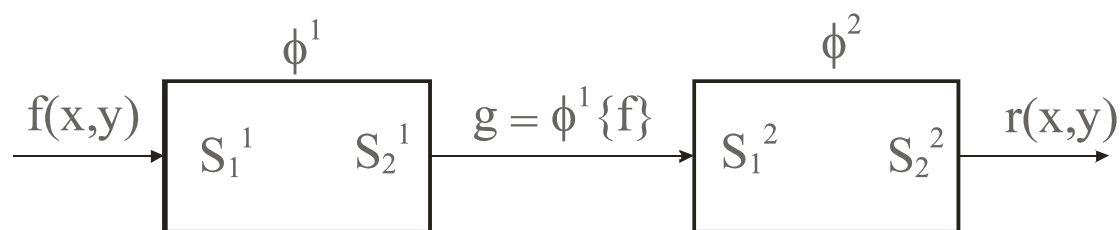
което означава, че системата е преобразува на множество функции от равнината (x_1, y_1) в множество функции в равнината (x_2, y_2) . Например, в оптичната система, която работи с кохерентна светлина, входният сигнал може да бъде функцията на разпределение на комплексната амплитуда в равнината на предмета, а изходният сигнал, функцията на разпределение на комплексната амплитуда в равнината на образа.

2.2 Каскадни системи

Нека са зададени две системи φ^1 и φ^2 със съответните им входни и изходни множества S_1^1, S_2^1 и S_1^2, S_2^2 . Тези системи образуват каскада, когато изходното S_2^1 множество на първата от тях φ^1 съвпадне с входното множество S_1^2 на втората система φ^2 . Тогава, ако $f(x, y)$ е входния сигнал за първата система и $r(x, y)$ е изходния сигнал от втората, Fig. 2.2, то

$$r = \varphi\{f\} = \varphi^2\{\varphi^1\{f\}\}$$

За да има тази трансформация на сигналите физически смисъл, необходимо е втората система да бъде способна да обработи изхода на първата, т.е., $S_2^1 \subset S_1^2$.



Фиг. 2.2

2.3 Линеини системи. Интеграл на суперпозиция

Една оптична система се нарича линейна, ако за всички входни функции $f_1^{(i)}(x, y)$ и за всички комплексни константи $a^{(i)}$ тя притежава свойството суперпозиция

$$\varphi\left\{\sum_i a^{(i)} f_1^{(i)}(x, y)\right\} = \sum_i a^{(i)} \varphi\{f_1^{(i)}(x, y)\}$$

Например, при $i = 1, 2$, важи, че

$$\varphi\{a^{(1)} f_1^{(1)}(x, y) + a^{(2)} f_1^{(2)}(x, y)\} = a^{(1)} \varphi\{f_1^{(1)}(x, y)\} + a^{(2)} \varphi\{f_1^{(2)}(x, y)\}.$$

Линейните системи притежават едно основно преимущество спрямо останалите системи. То се състои в следното: ако входен сигнал със сложна форма позволява да бъде представен като суперпозиция от елементарни прости функции, реакцията на системата на които е известна, то изходния сигнал може лесно да бъде възстановен, тъй като той е просто суперпозиция от отделните реакции. Следователно, при работа с линейни системи е необходим единствено прост и удобен метод за разлагане на произволен входен сигнал на суперпозиция от удобни за анализ, при прехода им през системата, елементарни функции. Един от възможните методи за подобно разлагане на входния сигнал е с помощта на филтриращото свойство на импулсия символ на Дирак

$$f_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

Това съотношение представя сигнала f_1 като плътна линейна суперпозиция от импулси със съответните тегловни коефициенти. С други думи, при това разлагане, елементарните функции са множеството плътни подредени Диракови импулси. Реакцията на оптичната системата на входен сигнал f_1 може да бъде определена, ако в уравнение (1) се замени със съответното разлагането за f_1

$$f_2(x_2, y_2) = \varphi \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \right\}$$

В интегралния оператор функцията f_1 има смисъла на тегловен коефициент и тогава операторът $\varphi \{ \}$ на системата, съгласно свойството линейност, следва да бъде приложен единствено върху поредицата от импулси

$$f_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) \varphi \{ \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) \} d\xi d\eta$$

Нека реакцията на системата в точка (x_2, y_2) , предизвикана от Дираков импулс, приложен в точка (ξ, η) на входа на системата, да описва на изхода с функцията $h(x_2, y_2, \xi, \eta)$

$$h(x_2, y_2, \xi, \eta) = \varphi \{ \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) \}$$

Функцията $h(x_2, y_2, \xi, \eta)$ се нарича **импулсна реакция** (*импулсен отклик*) на системата. Тогава

$$f_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) h(x_2, y_2, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

Това съотношение се нарича интеграл на суперпозиция и е изразява много важен факт:

Всяка линейна система е напълно определена от нейната импулсна реакция.

За да бъде напълно определен изходния сигнал е необходимо познаването на реакциите от всички импулси във входната равнина (ξ, η) . За оптична система, създаваща образ, този извод има следната физична интерпретация

Изобразяването на произволен предмет с оптична система, създаваща образ, (например, лещи, обективи, огледала, призмени системи, диафрагми и

др.) може да бъде описано напълно, ако е известен процесът на изобразяване на всеки елементарен точков източник, от множеството от които се състои предмета.

2.4 Инвариантни линейни системи. Предавателна функция

Инвариантните линейни системи са важно за оптиката подмножество на линейните системи. Най-общото определение за инвариантност на една линейна система, дефинирана във времето, е стационарният характер на нейната импулсна реакция. Това означава, че импулсния отклик на системата не зависи от момента на поява на сигнала на входа. Ако функцията $h(t, \tau)$ описва реакцията на системата в момента t на входен импулс, приложен в момента τ , то тази реакция зависи единствено от интервала $(t - \tau)$, т.е., $h(t, \tau) = h(t - \tau)$.

Забележка: Свойството инвариантност на линейните системи предполага, че те не притежават памет. Реакцията на системата на импулсен сигнал на входа не зависи от подобни предходни събития.

Свойството инвариантност и неговото определение са валидни и за системи, дефинирани в пространствени променливи. Линейна оптична система е инвариантна – *изопланатична* – ако нейната импулсна реакция $h(x_2, y_2, \xi, \eta)$ зависи само от разликите в разстоянията $(x_2 - \xi)$, $(y_2 - \eta)$. За такива системи импулсният отклик има вида

$$h(x_2, y_2, \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) .$$

Оптична система, създаваща образ, се счита за пространствено инвариантна, изопланатична, ако разпределението на полето в образа на точков източник е константно и не зависи от мястото на източника в предметната равнина. Образът променя единствено своето положение в образната равнина в съответствие с мястото на предмета върху предметната равнина, но остава винаги един и същ.

Реалните оптични системи, създаващи образ, са само в редки случаи изопланатични по цялото поле на предмета. При добре коригираните системи обикновено е възможно полето да се разбие на малки *изопланатични области*, в които системата е приблизително инвариантна. За да бъде напълно описана една оптична система, създаваща образ, е необходимо да бъдат определени импулсните реакции за всички изопланатични области.

За изопланатичната система интегралът на суперпозиция има вида

$$f_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta$$

или

$$f_2(x_2, y_2) = f_1(\xi, \eta) ** h(\xi, \eta)$$

или *изходния сигнал се равнява на конволюцията на входния сигнал с импулсния отклик на системата.*

Инвариантните системи, в сравнение с общия клас линейни системи, притежават безспорно предимство от гледна точка на удобство при математическото описание. То се състои в това, че те могат да бъдат описани много просто в областта на пространствените честоти. Наистина, ако извършим ФП върху двете страни на горното уравнение, съгласно теоремата за конволюцията, ще получим

$$F_2(u, v) = H(u, v) F_1(u, v)$$

където

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp[-i2\pi(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta .$$

Функцията $H(u, v)$ се нарича **предавателна функция** (или *честотна характеристика*) на системата. Тя описва работата на оптичната система за различни пространствени честоти. В съответствие с горното следва да се отбележи, че **трудоемката** операция конволюция често пъти се заменя с пресмятане на Фурие образите на съответните функции, тяхното умножение и след това намиране на обратното ФП.

Горното съотношение показва също така, че при линейни инвариантни системи входният сигнал може да се разложи на елементарни функции, по-удобни от импулсните, а именно по комплексни експоненциални функции, тъй като

$$F_1(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) \exp[-i2\pi(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta .$$

Разликата спрямо разлагането по δ -функции е, че в този случай разлагането е по пространствени честоти, а не по пространствени координати. Но както ще бъде показано по-нататък, в оптичните системи без aberации, двете групи променливи са в линейна зависимост.

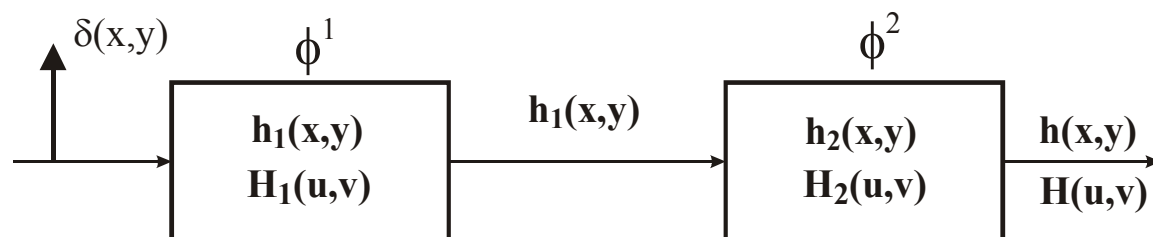
Умножението на $F_1(u, v)$ с предавателната функция $H(u, v)$ описва въздействието на системата върху всяка елементарна функция. Това нейно действие се изразява в *амплитудно* и *фазово* отместване, тъй като за всяка точка (u, v) от честотното пространство елементарната входна функция е умножена с комплексното число $H(u, v) = |H(u, v)| \exp\{i \arg[H(u, v)]\}$.

2.5 Честотна характеристика на каскадна система

Нека са дадени две системи φ^1 и φ^2 с импулсни реакции $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$, и с честотни характеристики, съответно, $H_1(u, v)$ и $H_2(u, v)$ и нека те са разположени последователно.

Нека функцията $h(x, y)$ да бъде импулсната реакция на системата като цяло. Тази функция е реакцията на цялата система на входен сигнал от вида на

Дираков импулс и същевременно е изходен сигнал за втората система. Но на входа на втората система постъпва сигнала $h_1(x, y)$ и тъй като, ако важи



Фиг. 2.3

$$f_2(x, y) = f_1(x, y) * h(x, y) \text{ , то при } f_1(x, y) = \delta(x, y)$$

$$f_2(x, y) = \delta(x, y) * h(x, y) = h(x, y)$$

и следователно

$$h(x, y) = h_1(x, y) ** h_2(x, y).$$

От теоремата за конволюцията следва, че

$$H(u, v) = H_1(u, v) H_2(u, v).$$

Честотната характеристика на каскадна система е произведение от отделните честотни характеристики.

2.6 Система с ограничен спектър. Теорема за дискретизацията

При обработката на образи със съвременните числени методи е необходимо естественото непрекъснато разпределение на комплексната амплитуда, например, в дадена равнината (x, y) , да бъде дискретизирано и представено като двумерен масив от стойности на величината в определени точки. Интуицията подсказва, че ако тези точки са избрани достатъчно близко една до друга, то изходната функция може би ще бъде възстановена с добро приближение. От друга страна, техническите средства за дискретизация и обработка на сигналите все още налагат строги ограничения върху броя отчетени стойности на входния сигнал. Общо решение на тази задача към момента няма. Но съществува клас функции, наречени функции с ограничена ширина на спектъра, които могат да бъдат точно възстановени от краен брой отчети, ако бъде спазено условието интервалът между отчетите да не превишават определена гранична стойност. Това твърдение се регламентира с теоремата за отчетите (за дискретизацията, *the sampling theorem*). Тази теорема хвърля мост между пространството на непрекъснатите сигнали и пространството на дискретните сигнали. Дискретизирането на сигналите води

до поевтиняване, възможност за програмиране и лесна повторяемост при промишленото производство.

Примери за дискретизация на сигнал:

1. При заснемането и прожектирането на подвижни сцени (в киното, в телевизията) всеки кадър представлява моментно изображение на непрекъснато изменящо се действие (отчет във времето). Когато тези отчети са направени през достатъчно малки интервали от време, те се възприемат като непрекъснат процес. От друга страна, отделните кадри (отчети във времето) могат да бъдат дискретизирани пространствено (при телевизионната обработка и предаване на образ), при която дискретизация при определена стъпка по двете координати, възприятието е почти естествено.

2. Преносът на образ върху печатащо устройство (принтер) е пример за пространствена дискретизация. Всяка точка е отчет от една плавна картина. Ако отчетите са достатъчно близко един до друг, изображението се възприема като непрекъснато. Но увеличена малка част от цялото показва дискретната структура на печата.

2.7 Теорема за дискретизацията (теорема на Уитакър – Шенън)

Теорема на Шенън: Ако $f(x, y)$ е непрекъснатата реална функция, за която е предварително известно, че нейният Фурие спектър $F(u, v)$ е ограничен в правоъгълната област $R: \{(-u_{\max}, u_{\max}), (-v_{\max}, v_{\max})\}$, т.е.

$$f(x, y) \xleftrightarrow{FT} F(u, v) = \begin{cases} 0, & |u| > u_{\max}, |v| > v_{\max} \\ \neq 0, & |u| \leq u_{\max}, |v| \leq v_{\max} \end{cases}$$

то тя е еднозначно определена и може да бъде точно възстановена от своя масив от дискретни стойности в координатната област $f(n\Delta x, m\Delta y)$, (n, m) – цели, при условие, че те се направени поне два пъти в произволни интервали $(\Delta x, \Delta y)$, в рамките на линейните периоди, отговарящи на максималните пространствени честоти u_{\max}, v_{\max} в спектъра на сигнала $f(x, y)$.

Доказателство:

Нека да разгледаме множеството отчети $f_s(x, y)$ на функцията $f(x, y)$ в правоъгълна мрежа със стъпки $(\Delta x, \Delta y)$ по осите (x, y) , съответно,

$$f_s(x, y) = f(x, y) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Delta x, y - m\Delta y) \right] \quad /2.7.1/$$

Двойната сума може да се опрости като

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(x - n\Delta x, y - m\Delta y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta \left[\Delta x \left(\frac{x}{\Delta x} - n \right), \Delta y \left(\frac{y}{\Delta y} - m \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta \left[\left(\frac{x}{\Delta x} - n \right), \left(\frac{y}{\Delta y} - m \right) \right] = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \text{comb} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \text{comb} \left(\frac{y}{\Delta y} \right), \end{aligned}$$

където бе използвано свойството за мащаба на δ – функцията. Следователно, масивът от отчети може да бъде записан във вида

$$f_s(x, y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \text{comb} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \text{comb} \left(\frac{y}{\Delta y} \right) f(x, y) \quad /2.7.2/$$

Ако приложим теоремата за конволюцията върху формула (2.7.2) и отново теоремата за мащаба,

$$\text{comb}(ax) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} \frac{1}{|a|} \text{comb} \left(\frac{u}{a} \right), \quad \text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - n),$$

то

$$\begin{aligned} F_s(u, v) &= FT \left\{ \frac{1}{\Delta x \Delta y} \text{comb} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \text{comb} \left(\frac{y}{\Delta y} \right) \right\} ** F(u, v) = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \text{comb}(u\Delta x) \text{comb}(v\Delta y) ** F(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(u\Delta x - n, v\Delta y - m) ** F(u, v) = \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta \left(u - \frac{n}{\Delta x}, v - \frac{m}{\Delta y} \right) ** F(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} F \left(u - \frac{n}{\Delta x}, v - \frac{m}{\Delta y} \right) \\ & \dots \dots \dots /2.7.3/ \end{aligned}$$

Следователно, Фурие образът $F_s(u, v)$ на дискретизираната функция $f_s(x, y)$ е редица от Фурие образи, разположени във възлите на мрежа със стъпки $\frac{1}{\Delta x}$

$\frac{1}{\Delta y}$, съответно по осите u и v . Всеки от тези образи е точно, но отместено

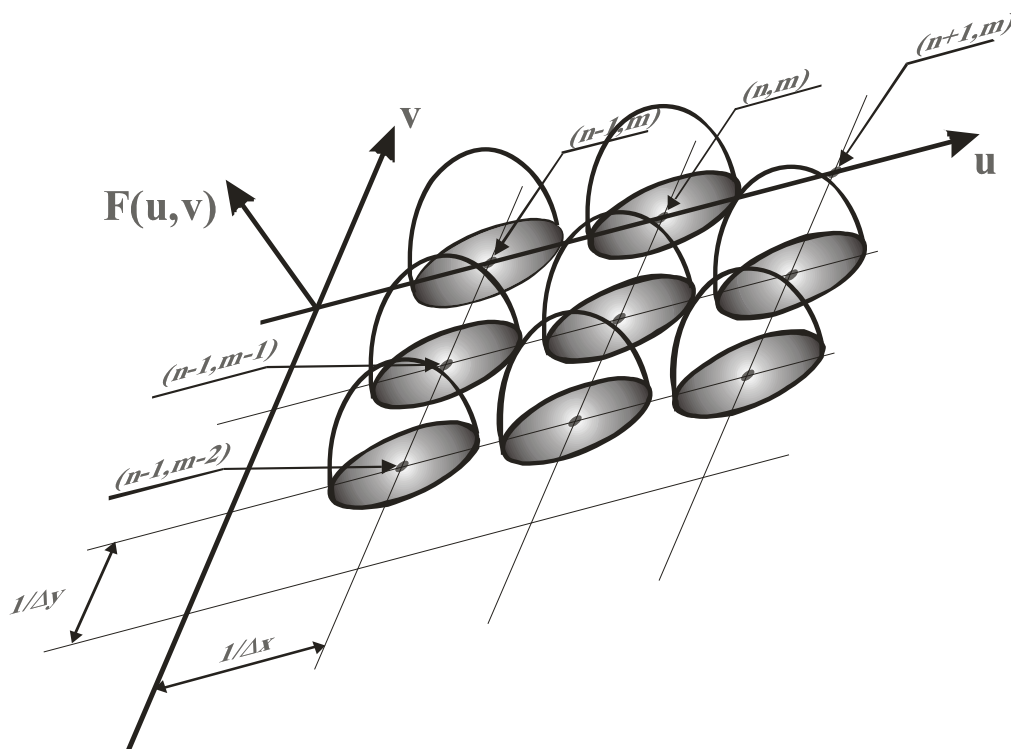
копие на Фурие образа $F(u, v)$ на непрекъснатия входен сигнал $f(x, y)$.

Съгласно условието, спектърът $F(u, v)$ на сигнала $f(x, y)$ е различен от нула само в определена правоъгълна област R в равнината на пространствените честоти. От формула (2.7.3) се вижда, че всяка област, в която спектърът $F_s(u, v)$ на дискретизирания сигнал е различен от нула, може да се намери като се построи областта R около всяка възлова точка $\left(\frac{n}{\Delta x}, \frac{m}{\Delta y} \right)$ от равнината (u, v) .

Ако стъпките на делене Δx и Δy са достатъчно малки, то разстоянията $\frac{1}{\Delta x}$

$\frac{1}{\Delta y}$ между отделните спектрални области в поредицата от спектри ще са

достатъчно големи и съседните области няма да се препокриват. Следователно, за да се постигне точно възстановяване на спектъра $F(u, v)$ на входния сигнал $f(x, y)$ от спектъра $F_s(u, v)$ на дискретизирания сигнал $f_s(x, y)$, то е необходимо той да бъде пропуснат мислено през линеен честотен филтър, през който от сумата (2.7.3) да преминат само членовете с индекси $n = m = 0$, а останалите членове на реда да бъдат напълно елиминирани.



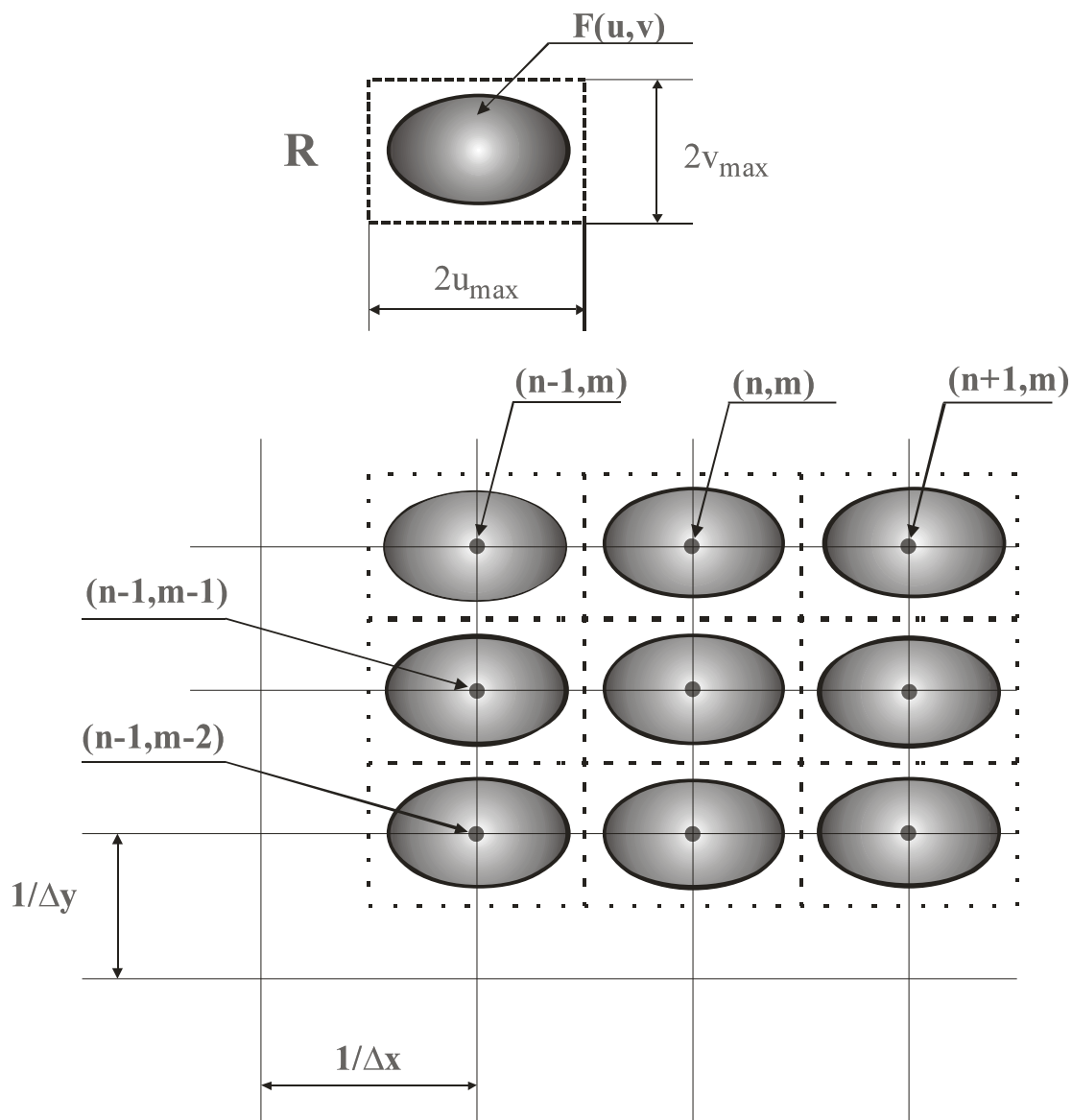
Предстои да бъдат решени две помощни задачи:

1. Да бъдат определени максимално допустимите разстояние (стъпки) между отчетите с оглед основното предположение – съседните спектрални области в реда (2.7.3) да не се препокриват.

Най-малкият правоъгълник, Фиг. 2.5, който включва в себе си областта R , има страни $2u_{\max}$ и $2v_{\max}$, измерени съответно по осите u и v . Тъй като различните компоненти в спектъра $F_s(u, v)$ на дискретизирания сигнал се намират на разстояние $\frac{1}{\Delta x}$ и $\frac{1}{\Delta y}$ съответно, то разделяне на спектралните области ще има, когато

$$\frac{1}{\Delta x} \geq 2u_{\max} \text{ и } \frac{1}{\Delta y} \geq 2v_{\max} \text{ или, когато } \Delta x \leq \frac{1}{2u_{\max}} \text{ и } \Delta y \leq \frac{1}{2v_{\max}},$$

т.е. допустимите максималните интервали (стъпки) на мрежата на отчетите (на разбиване на равнината (x, y)) следва да бъдат $(2u_{\max})^{-1}$ и $(2v_{\max})^{-1}$, съответно.



Фиг. 2.5

2. Вторият въпрос, на който предстои да бъде даден отговор е: *през каква линейна инвариантна система (през какъв честотен филтър) трябва да бъде пропусната функцията на отчетите за да бъдат елиминирани всички членове с изключение на тези с индекси $n = m = 0$* . Независимо от формата на областта R това изискване се удовлетворява от система с предавателна функция

$$H(u, v) = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \text{rect}\left(\frac{u}{2u_{\max}}\right) \text{rect}\left(\frac{v}{2v_{\max}}\right) = FT\{h(x, y)\} \quad /2.7.4/$$

Тогава действието на филтъра се описва със следното произведение

$$F_s(u, v) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \text{rect}\left(\frac{u}{2u_{\max}}\right) \text{rect}\left(\frac{v}{2v_{\max}}\right) = F(u, v) \quad /2.7.5/$$

В пространството на координатите този израз има вида (съгласно теоремата за конволюцията)

$$\left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right) f(x, y) \right] ** h(x, y) = f(x, y),$$

тъй като, съгласно (2.7.4) и (2.7.5), $f_s(x, y) ** h(x, y) = f(x, y)$ и, където $h(x, y) = FT^{-1}\{H(u, v)\}$. Съгласно (2.7.4), тази функция има вида

$$h(x, y) = 4u_{\max} v_{\max} \text{sinc}(2u_{\max} x) \text{sinc}(2v_{\max} y) \Delta x \Delta y$$

и, ако заместим за $f_s(x, y)$ от формула (2.7.1), ще получим

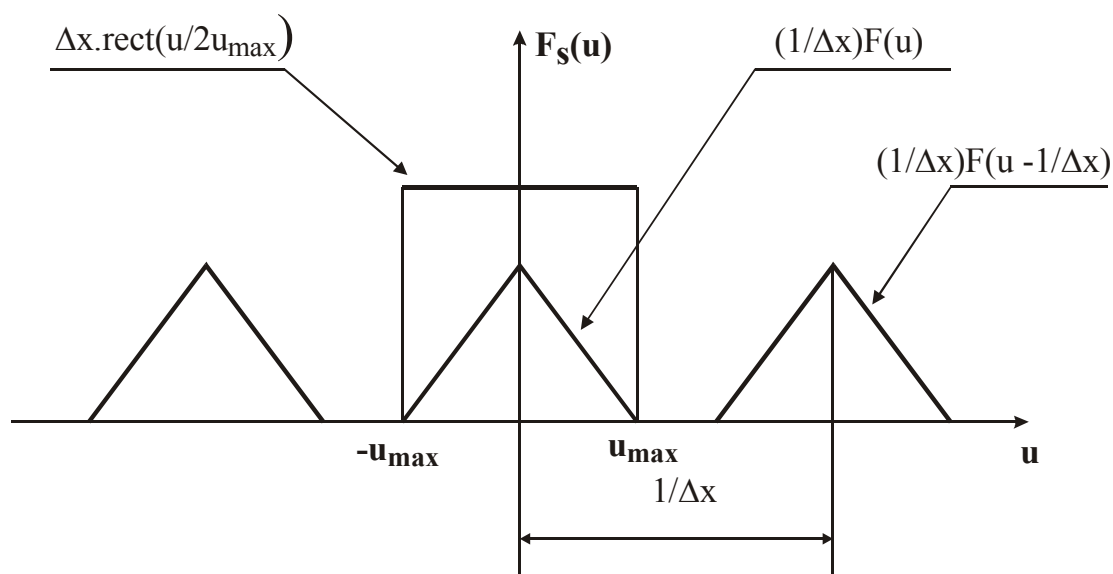
$$\left[f(x, y) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \delta(x - n\Delta x, y - m\Delta y) \right] ** h(x, y) = f(x, y)$$

И с малко преобразувания

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f(n\Delta x, m\Delta y) \delta(x - n\Delta x, y - m\Delta y) ** h(x, y) = f(x, y)$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f(n\Delta x, m\Delta y) \delta(x - n\Delta x, y - m\Delta y) \right] ** \quad /2.7.6/$$

$$** \left[4u_{\max} v_{\max} \text{sinc}(2u_{\max} x) \text{sinc}(2v_{\max} y) \Delta x \Delta y \right] = f(x, y)$$



Фиг. 2.6

Онагледяването на зависимостта (2.7.5) е по-просто, ако бъде разгледан едномерен случай, Фиг. 2.6.

$$F_s(u) \Delta x \operatorname{rect}\left(\frac{u}{2u_{\max}}\right) = F(u) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F\left(u - \frac{n}{\Delta x}\right) \Delta x \operatorname{rect}\left(\frac{u}{2u_{\max}}\right)$$

Имайки предвид, че $\operatorname{rect}(x) \xleftrightarrow{FT} \operatorname{sinc}(u)$, изразът (2.7.6) се преобразува така

$$4u_{\max} v_{\max} \Delta x \Delta y \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f(n\Delta x, m\Delta y) \operatorname{sinc}[2u_{\max}(x - n\Delta x)] \cdot \operatorname{sinc}[2v_{\max}(y - m\Delta y)] = f(x, y)$$

Когато интервалите между възлите на мрежата приемат своите максимално допустими стойности, $\Delta x = (2u_{\max})^{-1}$, $\Delta y = (2v_{\max})^{-1}$, горният израз приема вида

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f\left(\frac{n}{2u_{\max}}, \frac{m}{2v_{\max}}\right) \operatorname{sinc}[2u_{\max}(x - n\Delta x)] \operatorname{sinc}[2v_{\max}(y - m\Delta y)] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f\left(\frac{n}{2u_{\max}}, \frac{m}{2v_{\max}}\right) \operatorname{sinc}\left[2u_{\max}\left(x - \frac{n}{2u_{\max}}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[2v_{\max}\left(y - \frac{m}{2v_{\max}}\right)\right] \end{aligned}$$

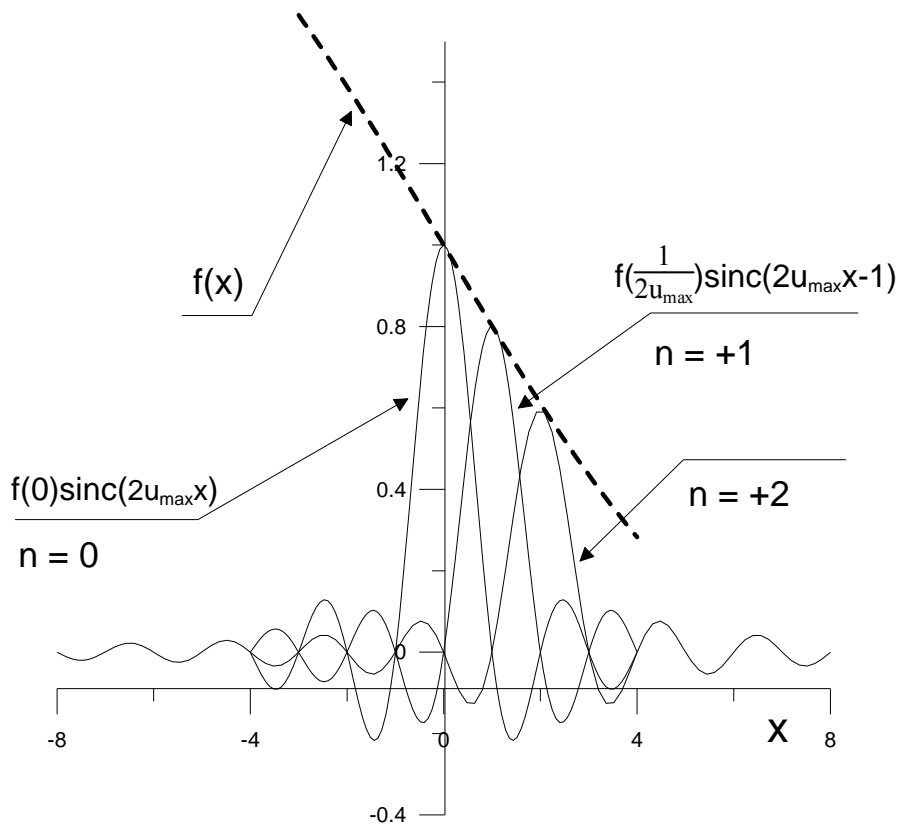
..... /2.7.7/

който изразява **теоремата за дискретизация**. Изводът от нея е, че ако имаме набор измервания на сигнал с ограничен спектър, направени в точките от мрежа със стъпка $(2u_{\max})^{-1}$ и $(2v_{\max})^{-1}$, съответно, то този сигнал може да бъде възстановен точно. За това е необходимо в точката на всеки отчет да бъде въведена интерполационна функция, равна на произведението на двойка *sinc* – функции. При доказателството бяха направени две произволни допускания: за правоъгълна мрежа на разбиване и за правоъгълна форма на честотната функция на филтъра.

На Фиг. 2.7 са показани с демонстрационна цел първите три члена от реда при възстановяването на изходна функция в едномерен случай.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f\left(\frac{n}{2u_{\max}}\right) \operatorname{sinc}\left[2u_{\max}\left(x - \frac{n}{2u_{\max}}\right)\right]$$

Ако бъдат построени всички членове на реда и бъдат сумирани, то функцията $f(x)$ ще бъде възстановена напълно.



Фиг. 2.7

3. Скаларна теория на дифракцията на светлината. Приложение при оптичните линейни, пространствено инвариантни системи

Явлението дифракция играе изключително важна роля във оптиката и навсякъде, където има процеси, свързани с разпространение на вълни. Арнолд Зомерфелд (1950 г.) определя *дифракцията като всяко отклонение на светлината от праволинейното разпространение, което не може да бъде обяснено с процесите на отражение или пречупване*. Формулировката и решаването на дифракционна задача се прави в координатната област, като връзката между разпределението на амплитудите в две равнини, разположени на разстояние една от друга, се дава от интеграла на Френел – Кирхоф. При определени условия, използвайки интегралното ФП и теорията на линейните инвариантни системи, анализът на дифрактиралото поле може да бъде проведен и в областта на пространствените честоти. Така явлението разпространение на светлинни вълни може да бъде представено като линейна, пространствено инвариантна система (или като пространствен филтър), която притежава относително проста честотна характеристика.

3.1. Решение на вълновото уравнение за плоска монохроматична вълна

Светлинните вълни, които се разпространяват в свободното пространство, удовлетворяват вълновото уравнение. То може да бъде изведено от уравненията на Максвел във вида

$$\nabla^2 E(x, y, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(x, y, z, t)}{\partial t^2} \quad /3.1/$$

и има решение от вида

$$E(x, y, z, t) = U_0(x, y, z, t) \cos[2\pi vt + \varphi(x, y, z)]$$

където $E(x, y, z, t)$ е една от двете ортогонални компоненти на интензитета на електрическото поле, трептящи в равнина, перпендикулярна на посоката на разпространение на вълната. Това решение за удобство се представя в комплексната форма

$$E(x, y, z, t) = \text{Re}[U(x, y, z) \exp(i2\pi vt)],$$

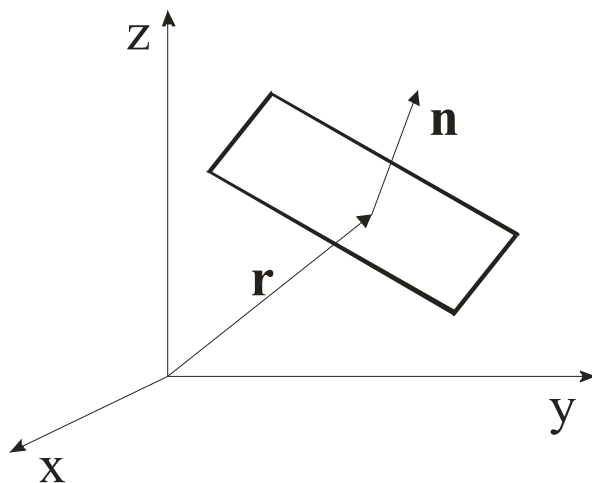
където с

$$U(x, y, z) = U_0(x, y, z) \exp[i\varphi(x, y, z)]$$

е означена комплексната амплитуда на полето. При работа с това представяне конвенционалното означение $\text{Re}[\dots]$ не се пише, но там където е необходимо, от резултата се взима само реалната част.

В хомогенна изотропна среда плоска вълна е тази, за която амплитудата и фазата във всеки един момент от време са постоянни в равнината с уравнение

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \text{const.}$, където \mathbf{r} е радиус – вектора на точка от пространството, а \mathbf{n} е векторът на единичната нормала към тази равнина.



Фиг. 3.1

Нека положим, че едно от скаларните решения на вълновото уравнение за електричното поле има вида

$$E(x, y, z, t) = U_0 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \exp(i2\pi\nu t),$$

където величината $k = \text{const.}$ се нарича константа на разпространение, и в този си вид полето удовлетворява вълновото уравнение (3.1). Ако $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \text{const.}$, то това решение е уравнение на плоска вълна, която се разпространява в пространството в посока на вектор \mathbf{n} , Фиг. 3.1. Ако означим с $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ косинус-директорите на вектор \mathbf{n} , т.е.

$$\mathbf{n} \equiv (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \text{ и } |\mathbf{n}| = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

то полето има вида

$$E(x, y, z, t) = U_0 \exp[-ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)] \exp(i2\pi\nu t). \quad /3.2/$$

Ако заместим в (3.1) ще получим стойността на константата на разпространение

$$-k^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \text{ или } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Тогав

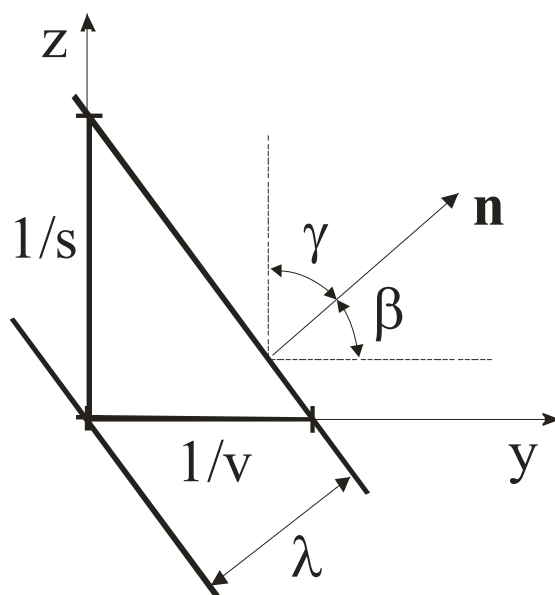
$$\begin{aligned} E(x, y, z, t) &= U_0 \exp\left[-i2\pi\left(x \frac{\cos \alpha}{\lambda} + y \frac{\cos \beta}{\lambda} + z \frac{\cos \gamma}{\lambda}\right)\right] \exp(i2\pi\nu t) = \\ &= U_0 \exp[-i2\pi(xu + yv + zs)] \exp(i2\pi\nu t) = U(x, y, z, t) \exp(i2\pi\nu t) \end{aligned} \quad /3.3/$$

Тъй като целта на нашето разглеждане е да бъде изследвано разпространението на монохроматична светлина, то при анализа на този процес ще бъде използвана

само комплексната амплитуда $U(x, y, z, t)$. Величините u , v и s се наричат *пространствени честоти* и представляват *реципрочните стойности на периодите* на вълната върху осите x , y и z , съответно, Фиг. 3.2. Техните стойности са

$$u = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad v = \frac{\cos \beta}{\lambda}, \quad s = \frac{\cos \gamma}{\lambda}$$

$$\cos[(\alpha, \beta, \gamma)] = [(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \cdot \mathbf{n}]$$



Фиг. 3.2

Пространствените честоти могат да бъдат положителни или отрицателни, ако посоката на разпространение (векторът \mathbf{n}) сключва със съответната ос ъгъл $< 90^\circ$ (положителни) или ъгъл $> 90^\circ$ (отрицателни). Ако, например, вълната се движи по оста z ($u = v = 0, s = \frac{1}{\lambda}$) от (3.3) следва, че *фазата на вълната* в даден момент от време *намалява с увеличение на разстоянието от източника*. Пространствените честоти не са независими. От $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ следва, че

$$(u\lambda)^2 + (v\lambda)^2 + (s\lambda)^2 = 1 \text{ или}$$

$s = \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (u\lambda)^2 - (v\lambda)^2}$, където знаците \pm са в зависимост от посоката на разпространение. Тогава

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= U_0 \exp[-i2\pi(ux + vy)] \exp(-i2\pi sz) = \\
 &= U_0 \exp[-i2\pi(ux + vy)] \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda} z \left(1 - (u\lambda)^2 - (v\lambda)^2\right)^{1/2}\right] = \quad /3.4/ \\
 &= U(x, y, 0) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda} z \left(1 - (u\lambda)^2 - (v\lambda)^2\right)^{1/2}\right]
 \end{aligned}$$

т.е., комплексната амплитуда на плоска вълна на произволно разстояние z се равнява на произведението на амплитудата в началната равнина $z=0$ с експоненциална функция, намаляваща с разстоянието z .

3.2 Ъглов спектър и неговия физичен смисъл

Нека предположим, че разглежданата вълна е създадена от произволна система точкови монохроматични източници и, че тя се разпространява по посока на оста z . В равнината Oxy нейната комплексна амплитуда се описва с функцията $U(x, y, 0)$. Нека пресметнем полето $U(x, y, z)$ в точка $P_0(x, y, z)$, лежаща в равнината z . В равнината Oxy Фурие образа на $U(x, y, 0) = U(x, y)$ е

$$FT\{U(x, y)\} = A_0(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \exp[i2\pi(ux + vy)] dx dy$$

или

$$FT^{-1}\{A_0(u, v)\} = U(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u, v) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dudv \quad /3.5/$$

Това съотношение показва, че сложната, в равнината Oxy , функция $U(x, y)$ може да бъде разложена на множество прости експоненциални функции. Сравнението на (3.5) с (3.4) показва, че в равнината $z=0$ комплексната функция $\exp[-i2\pi(ux + vy)]$ може да бъде разглеждана като плоска вълна с единична амплитуда и косинус – директори

$$\cos \alpha = u\lambda, \quad \cos \beta = v\lambda, \quad \cos \gamma = s\lambda = \sqrt{1 - (u\lambda)^2 - (v\lambda)^2}.$$

Уравнение (3.5) представлява плътна сума от плоски вълни с разпределение на амплитудите $A_0(u, v)$, където $u = \frac{\cos \alpha}{\lambda}$, $v = \frac{\cos \beta}{\lambda}$. Множеството функции

$$A_0(u, v) \exp[-i2\pi(ux + vy)]$$

представлява „ветрило” от елементарни плоски вълни, разпространяващи се под различни ъгли, определени от честотите u, v . Затова функцията

$$A_0\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}x + \frac{\cos \beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy,$$

която описва разпределението на амплитудите на елементарните плоски вълни в честотното пространство, се нарича **ъглов спектър** на комплексното поле $U(x, y, 0)$ в равнината $z = 0$.

След като знаем как да представим произволна вълна чрез нейния ъглов спектър от елементарни плоски вълни следва да бъде даден отговор и на въпроса как този спектър се разпространява в пространството. За целта нека да разгледаме ъгловия спектър на трептенията $U(x, y, z)$ в равнина, разположена на разстояние z от началото и паралелна на Oxy . По дефиниция, функцията

$$A\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}, z\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) \exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}x + \frac{\cos \beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy$$

е ъглов спектър на разпределение на комплексната амплитуда $U(x, y, z)$. И обратно, ако е известен ъгловия спектър на полето в равнината $z = z$, то комплексната амплитуда на полето в тази равнина би следвало да бъде равна на

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= FT^{-1}\left\{A\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}, z\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(u, v, z) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dudv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}, z\right) \exp\left[-i2\pi\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}x + \frac{\cos \beta}{\lambda}y\right)\right] d\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}\right) d\left(\frac{\cos \beta}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Но от формула (3.4) следва, че

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}, z\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}z(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)^{1/2}\right] \exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}x + \frac{\cos \beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy \end{aligned}$$

или

$$A\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}, z\right) = A_0\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}z(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)^{1/2}\right] \quad /3.7/$$

т.е., ако знаем ъгловия спектър на вълната във входната равнина $z = 0$, то от (3.7) може да бъде определен нейният ъглов спектър в произволна равнина, лежаща на разстояние z от началото.

1). Ако $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta < 1$, то експонентата в (3.7) е положителна величина и разпространението на вълната на разстояние z се проявява само в изменението на относителната фазова разлика между отделните компоненти на ъгловия спектър. Това фазово отместване е следствие на факта, че отделните плоски

вълни, разпространяващи се под различни ъгли, изминават различни разстояния докато достигнат дадената точка.

2). Ако $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$, то изразът $(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)^{1/2}$ е чисто имагинерна величина, равна на $(\pm ib)$. Ако бъде избран знак минус пред радикала (знакът плюс няма физичен смисъл, води до нарастване на амплитудата с отдалечаване от източника), то експонентата има вида $\exp(-b)$ и вълната е затихваща с разстоянието z . Аналогично явление се наблюдава при пълното вътрешно отражение на светлината.

Контролен въпрос: Какъв е смисълът на израза $(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)$, защо не се пише $\cos^2 \gamma$? Може ли $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$?

3.3 Влияние на апертура върху ъгловия спектър на вълната

В равнината $z = 0$ е разположен безкраен, непрозрачен екран с отвор σ . Нека разгледаме как този отвор, чийто амплитуден коефициент на пропускане в най-простия случай има вида

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \sigma \\ 0, & (x, y) \notin \sigma \end{cases},$$

влияе върху ъгловия спектър на полето, което е достигнало до екрана с ъглов спектър $A_i\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right)$. При това разглеждане ще бъде направено силното предположение, че наличието на екран не влияе на падащото поле и, че полето в геометричната сянка на екрана е тъждествено равно на нула. Тогава полето непосредствено зад екрана е равно на

$$U_i(x, y, 0) = U_i(x, y, 0)t(x, y) \quad /3.8/$$

където $U_i(x, y, 0)$ е комплексната амплитуда на падащата вълна, измерена непосредствено пред екрана. Ако върху двете страни на равенство (3.8) бъде приложено ФП и теоремата за конволюцията, то

$$A_i\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = A_i\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) ** T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right),$$

където

$$T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = FT\{t(x, y)\}.$$

Като илюстрация на казаното нека да бъде разгледан частния случай на нормално падащата върху екрана плоска вълна с единична амплитуда. Нейният ъглов спектър има опростената форма

$$A_i\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right),$$

и този на преминалото поле е равен на

$$A_t\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) ** T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right).$$

Следователно, ъгловият спектър на преминалата през отвора вълна, възбудена от плоска вълна с единична амплитуда, падаща нормално върху екрана, е Фурие образ на функцията на пропускане

$$T\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}x + \frac{\cos \beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy$$

Така, *поставянето на пътя на вълната на екран с ограничаващ апертурата отвор, води до разширение на ъгловия спектър на последната.*

3.4 Разпространението на вълна в светлината на линеен пространствен филтър

Нека отново разгледаме разпространението на светлината от равнината $z = 0$ до равнината z . Преобразуването на полето, в резултат на процеса на разпространение, съответства на определението за система. *Линейността на явленияето разпространение* следва непосредствено от линейността на вълновото уравнение или от интеграла на суперпозиция (а също и от интеграла на Хюйгенс – Френел). А пространствената инвариантност на системата може да бъде демонстрирана, ако бъде определен израза за предавателната функция, описваща ефекта от разпространението.

Ако разгледаме отново израза (3.7), където съответните означения имат смисъла на

$$A(u, v, z) = FT\{U(x, y, z)\} \text{ и } A_0(u, v) = FT\{U(x, y, 0)\},$$

и, ако си припомним, че предавателната функция на една линейна система се дефинира като отношението на Фурие спектъра на изходящия сигнал към спектъра на входния сигнал,

$$H(u, v) = \frac{FT\{U(x, y, z)\}}{FT\{U(x, y, 0)\}} = \frac{A(u, v, z)}{A_0(u, v)},$$

то става ясно, че процесът на разпространение на вълната се характеризира с предавателната функция

$H(u, v) = \frac{A(u, v, z)}{A_0(u, v)} = \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} z (1 - u^2 \lambda^2 - v^2 \lambda^2)^{1/2}\right]$, която е дефинирана в областта

$$H(u, v) = \begin{cases} \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} z (1 - u^2 \lambda^2 - v^2 \lambda^2)^{1/2}\right], & u^2 + v^2 < \frac{1}{\lambda^2} \\ 0, & \text{в останалата част от равнината } (u, v) \end{cases}$$

Следователно, разпространението на светлината има характера на *линеен диспергиращ филтър* (в този случай фазата на преминалата вълна зависи от дължината на вълната) с крайна лента на пропускане на пространствените честоти. Извън кръгът с радиус $(1/\lambda)$ в честотната равнина (u, v) пропускането е равно на нула. Вътре в тази област модулът на предавателната функция е $|H(u, v)| = 1$, но се появяват *честотно зависими фазови отмествания*, като фазовата дисперсия е най-голяма при високите честоти и обратно, клони към нула, когато $(u, v) \rightarrow 0$.

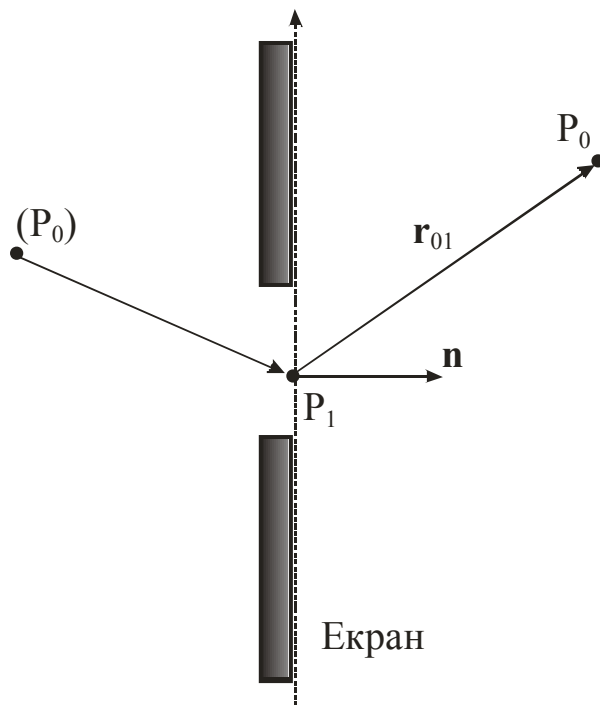
3.5 Дифракция на Френел и Фраунхофер в светлината на теорията на линейните системи

Нека осъдим изводите от скаларната теория на дифракция на светлината от гледната точка на теорията на линейните системи. Светлинната вълна нека да се разпространява през линейна инвариантна система, като целта е да се установи разпределението на комплексната амплитуда в изходната равнина при известно нейно разпределение в дадена входна равнина.

При извеждането на математическата формула, описваща принципа на Хюйгенс – Френел се предполага, че отвор в непрозрачен екран се осветява от една разходяща сферична вълна, с източник в точка (P_0) (Фиг. 3.3). При достигане до отвора, всяка точка P_1 от повърхността му се превръща в източник на вторична сферична вълна. Вълните от всички секундарни източници интерферират помежду си и дават полето U_0 в точка P_0 , лежаща на разстояние r_{01} от екрана. При условие, че $r_{01} \gg \lambda$, при извода на формулите за дифракция на Рейли – Зомерфелд се получава

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) dS \quad /3.9/$$

където интегрирането е по площта на отвора σ . Тази формула представлява математически израз на принципа на Хюйгенс – Френел. Тя е валидна за осветяване от произволен тип. Според формулата произволен източник винаги може да се представи като безкрайно множество от точкови източници и тъй като вълновото уравнение е линейно, принципа на Хюйгенс – Френел може да се приложи за всеки един източник по отделно.



Фиг. 3.3

От друга страна изразът (3.9) може да бъде разглеждан и като *интеграл на суперпозиция* за една система

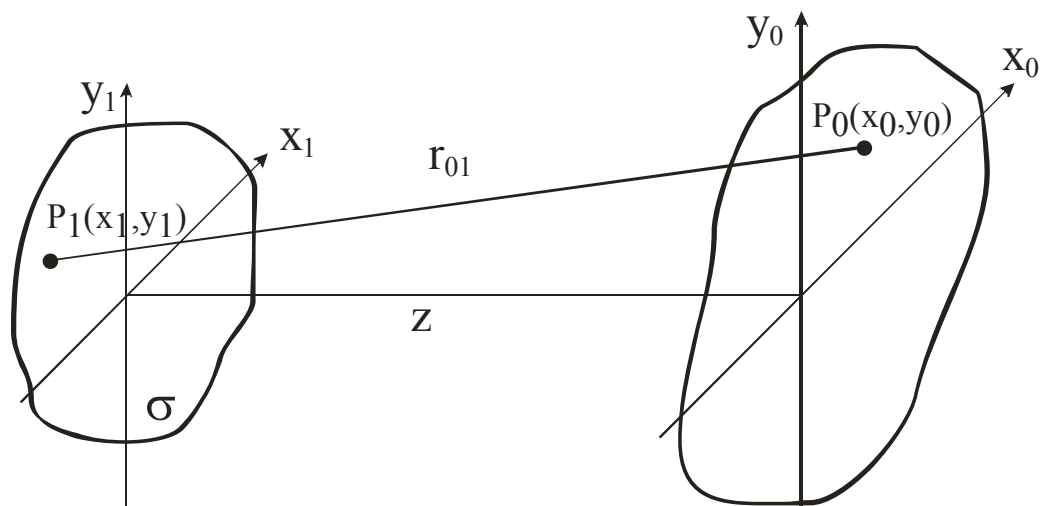
$$U(P_0) = \iint_{(\sigma)} U(P_1) h(P_0, P_1) dS, \quad /3.9a/$$

където импулсният отклик на системата има вида

$$h(P_0, P_1) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}).$$

Тази функция може да бъде интерпретирана като елементарна сферична вълна, така както гласи принципа на Хюйгенс – Френел. Появата на интеграла (3.9а) не бива да поражда учудване, тъй като свойството линейност се предполагаше от самото начало на анализа на дифракционното явление.

Нека сега да разгледаме по-подробно дифракцията на монохроматична светлинна вълна върху безкраен непрозрачен екран с краен по размер отвор σ . Екранът се намира във входната равнина (x_1, y_1) , (Фиг. 3.4), а областта на наблюдение, изходната равнина (x_0, y_0) , успоредна на входната, е на разстояние z от нея. Координатните оси (x_0, y_0) на изходната равнина са успоредни на тези на входната (x_1, y_1) . С помощта на математическия модел на принципа на Хюйгенс – Френел нека определим комплексната амплитуда на полето в равнината (x_0, y_0) .



Фиг. 3.4

$$U(x_0, y_0) = \iint_{(\sigma)} h(x_0, y_0; x_1, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad /3.10/$$

където функцията

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})$$

описва амплитудата на сферична вълна, която от своя страна, ако $r_{01} \rightarrow \infty$ ще клони към плоска. Тъй като, съгласно приближението на Кирхоф, полето извън апертурата на отвора е тъждествено равно на нула, $U(x_1, y_1) = 0$, то можем да пишем

$$U(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_0, y_0; x_1, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

Приближения:

- а). Разстоянието z е много голямо в сравнение с максималния размер на отвора σ в екрана.
- б). Разглежда се само крайна област близко до оста z .
- в). Разстоянието z е много по-голямо от размера на тази област.

Тогава, ако тези приближения са допустими, можем да считаме, че $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) \approx 1$ (грешката при това допускане е по-малка от 5%, ако $\angle(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) \leq 18^\circ$) и тогава $h(x_0, y_0; x_1, y_1) \approx \frac{1}{i\lambda z} \exp(ikr_{01})$, което от своя страна представлява отново (но приблизително, в действителност е повърхност от втори ред) сферична вълна. В експонентата не е допустима замяната на r_{01} с z ,

тъй като, за светлинните вълни, в знаменателя на $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ е много малка величина и малки вариации на r_{01} водят до големи фазови изменения.

3.5.1 Приближение на Френел

В определена пространствена област, разстоянието r_{01} може да бъде представено с добра точност с първите два члена на степенен ред

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x_0 - x_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - y_1}{z}\right)^2} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y_1}{z}\right)^2 \right]$$

Тогава

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i \frac{k}{2z} \left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right]\right] \quad /3.11/$$

Областта, в която изразът (3.11) е валиден, се нарича **област на Френел**. Под думичката “валиден” следва да се разбира, че замяната на точния израз с приближението (3.11) не би трябвало да води до фазови разлики по-големи от $\pi/2$ (или в оптичен път $\lambda/4$ съгласно *критерия на Рейли*). Естествено, тази граница следва да бъде определена от изискванията на конкретната задача или приложение.

Следните **изводи** са следствие от горното приближение:

1). Амплитудата $U(x_0, y_0)$, определена от интеграла на суперпозиция, може да се разглежда като конволюция на амплитудата $U(x_1, y_1)$ с функцията импулсен отклик $h(x_1, y_1)$

$$U(x_0, y_0) = U(x_1, y_1) ** h(x_1, y_1) \text{ или}$$

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) \exp\left[i \frac{k}{2z} \left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right]\right] dx_1 dy_1$$

Забележка: За функцията $h(x_1, y_1)$ не бива да се замества автоматично с формула (3.11), тъй като в действителност импулсният отклик има вида

$$h(x_1, y_1) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x_1^2 + y_1^2)\right].$$

2). Нека разложим квадратичните членове

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \exp\left[-i2\pi\left(\frac{x_0}{\lambda z}x_1 + \frac{y_0}{\lambda z}y_1\right)\right] dx_1 dy_1 \\ \dots\dots\dots /3.12/$$

или с други думи,

$$U(x_0, y_0) = C.FT\left\{U(x_1, y_1) \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right]\right\} = C.\tilde{U}(u, v), \quad /3.13/$$

където комплексната константа C се равнява на

$$C = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right],$$

а пространствените честоти са равни на $u = \frac{x_0}{\lambda z}$, $v = \frac{y_0}{\lambda z}$.

Представянето на интеграла на суперпозиция като конволюция с функцията $h(x_1, y_1)$, предлага значително удобство. Така дифракцията може да бъде изследвана и в областта на пространствените честоти. При това

$$H(u, v) = FT\{h(x_0, y_0; x_1, y_1)\} = \exp(ikz) \exp\left[i\pi\lambda z(u^2 + v^2)\right] \quad /3.14/$$

или $h(x_0, y_0; x_1, y_1) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} H(u, v)$, тъй като

$$\exp(-\pi c x^2) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} \frac{1}{c^{1/2}} \exp\left(-\pi \frac{u^2}{c}\right)$$

3.5.1 Приближение на Фраунхофер

Решението на дифракционната задача се опростява значително, ако експонентата с квадратичният член във Фурие образа на $U(x_0, y_0)$ (3.13) стане близка до единица, т.е. $e^0 = 1$. Условието, това да бъде изпълнено, е

$$\left.\frac{k}{2}(x_1^2 + y_1^2)\right|_{\max} \ll z, \quad (x_1, y_1) \in \sigma.$$

Областта, в която това условие е удовлетворено, се нарича *област на Фраунхофер или далечна зона*. Тогава

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i \frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) \exp\left[-i2\pi\left(\frac{x_0}{\lambda z}x_1 + \frac{y_0}{\lambda z}y_1\right)\right] dx_1 dy_1 \quad /3.15/$$

Амплитудата на дифрактиралото поле се равнява, с точност до комплексна константа, на Фурие образа на разпределението на амплитудата в отвора на екрана. Комплексният множител пред интеграла в (3.15) няма принос в разпределението на интензитета в равнината на наблюдение (x_1, y_1) . В случаите, когато предмет на изследване е пряко измеряемата величина, интензитета, а не разпределението на амплитудата на полето или неговата понататъшната трансформация, този множител се изоставя. Интегралът в (3.15) може да бъде представен и с пространствените честоти

$$u = \frac{x_0}{\lambda z}, \quad v = \frac{y_0}{\lambda z}.$$

Условието за наличие на дифракция на Фраунхофер би могло да бъде трудно изпълнимо. Например, ако

$$x_1 = y_1 = 2,5 \text{ cm} = 0,025 \text{ m} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda \approx 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$z = \frac{\pi \left[2 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^2 \right]}{0,6 \cdot 10^{-6}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 625 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 10^{-6}} \approx 6000 \text{ m}$$

и аналогично, при $x_1 = y_1 = 2,5 \text{ mm}$ $z \approx 600 \text{ m}$.

Въпреки това, както ще се убедим по-късно, в множество важни случаи условието $z \gg \frac{k}{2}(x_1^2 + y_1^2)_{\max}$ е изпълнено с достатъчна точност.

3.5.2 Дифракция на Фраунхофер за някои специални случаи

1). Правоъгълен отвор

Преди да пристъпим към пресмятането на дифрактиралото поле, нека припомним, че детекторите, с които разполагаме, реагират на усреднената във времето средна стойност на квадрата на модула на амплитудата, т.е. на интензитета на полето $I(P) = \langle |U(P)|^2 \rangle$

Нека е даден екран с правоъгълен отвор, чиято функция на пропускане е

$$t(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{L_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{L_y}\right)$$

и този екран да бъде осветен с нормално падаща плоска монохроматична вълна с единична амплитуда. Тогава функцията $t(x_1, y_1)$ описва разпределението на комплексната амплитуда на полето в отвора на екрана. Тъй като изходната амплитуда $U(x_1, y_1) = 1 \cdot t(x_1, y_1)$, то от уравнение (3.15) следва, че

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \cdot FT\{U(x_1, y_1)\} = \\ = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \cdot FT\{t(x_1, y_1)\}$$

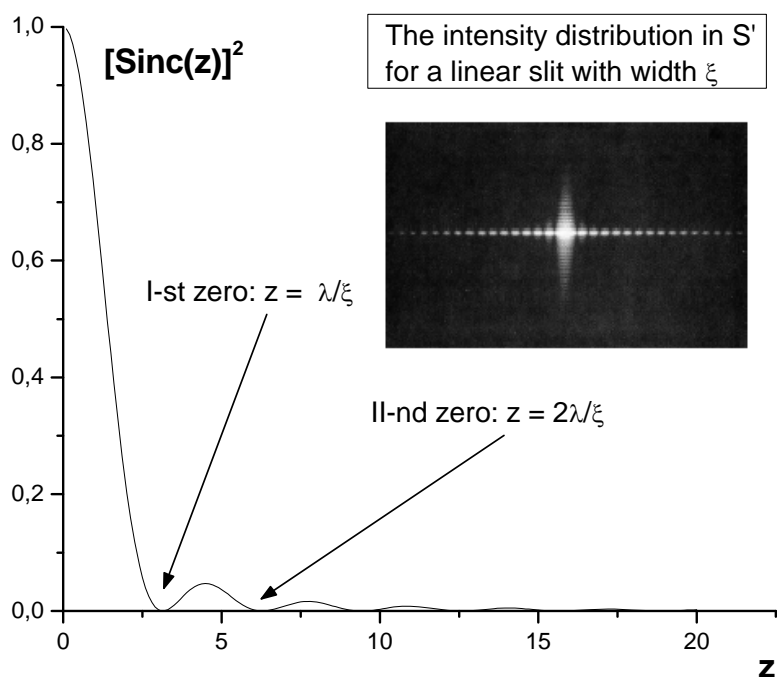
Но

$$FT\{t(x_1, y_1)\} = L_x L_y \operatorname{sinc}\left(\frac{L_x}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{L_y}{\lambda z} y_0\right).$$

Тогава разпределението на интензитета в равнината на наблюдение е

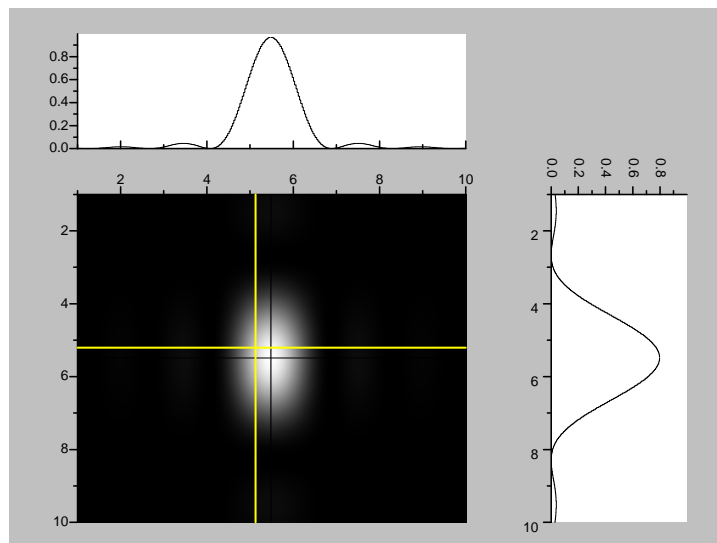
$$I(x_0, y_0) = \frac{(L_x L_y)^2}{(\lambda z)^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{L_x}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{L_y}{\lambda z} y_0\right) \quad /3.16/$$

Нулите на това разпределение са за цели стойности на аргументите.



Фиг. 3. 5а

Разпределението на интензитета от един процеп с ширина ξ е показано на Фиг. 3.5а, а разпределението от правоъгълен отвор е показано на Фиг. 3.5б.

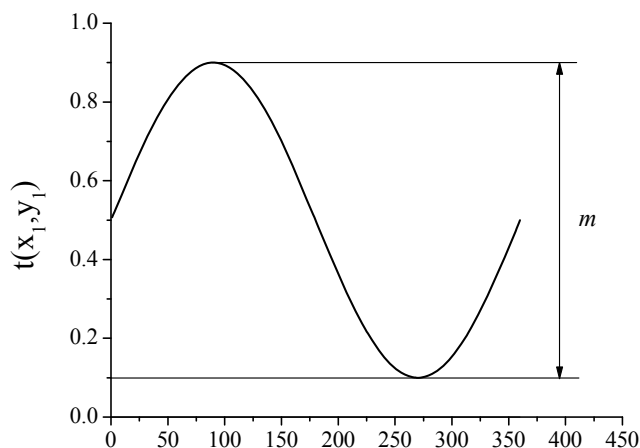


Фиг. 3. 5б

3.5.3 Синусоидална амплитудна решетка

Нека коефициентът на амплитудна пропускливост на екрана с отвора да се описва с функцията

$$t(x_1, y_1) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1) \right] \text{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{L}\right).$$



Този обект представлява квадратна по форма, със страна L , едномерна хармонична амплитудна решетка, където m е дълбочината на модулация, а f_0 е честота. Нека екрана, в центъра на който е разположена решетката, да бъде осветен нормално с плоска монохроматична вълна с единична амплитуда. Комплексната амплитуда на полето в далечната зона е пропорционална на

Фурие спектъра на функцията на амплитудна пропускливост на екрана. Този спектър може да бъде определен с помощта на следните разсъждения

$$U(x_0, y_0) = FT\{U(x_1, y_1)\} = FT\{t(x_1, y_1)\} = T(u, v), \quad u = \frac{x_0}{\lambda z}, v = \frac{y_0}{\lambda z}$$

$$FT\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_1)\right]\right\} = A(u, v) = \frac{1}{2} \delta(u, v) + \frac{m}{2} \frac{1}{2} [\delta(u + f_0, v) + \delta(u - f_0, v)]$$

$$FT\left\{\text{rect}\left(\frac{x_1}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{L}\right)\right\} = B(u, v) = L^2 \text{sinc}(Lu) \text{sinc}(Lv)$$

$T(u, v) = A(u, v) ** B(u, v)$ или, ако заместим

$$T(u, v) = \frac{L^2}{2} \text{sinc}(Lv) \left\{ \text{sinc}(Lu) + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(u + f_0)] + \frac{m}{2} \text{sinc}[L(u - f_0)] \right\}$$

Комплексната амплитуда в далечната зона е

$$U(x_0, y_0) = \frac{L^2 \exp(ikz)}{i2\lambda z} \exp\left[i \frac{k}{2z} (x_0^2 + y_0^2)\right] \times$$

$$\times \text{sinc}\left(\frac{L}{\lambda z} y_0\right) \left\{ \text{sinc}\left(\frac{L}{\lambda z} x_0\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{L}{\lambda z} (x_0 + f_0 \lambda z)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{L}{\lambda z} (x_0 - f_0 \lambda z)\right] \right\}$$

Интензитетът на това поле е равен на

$$I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2 = \left(\frac{L^2}{2\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{L}{\lambda z} y_0\right) \times$$

$$\times \left\{ \text{sinc}\left(\frac{L}{\lambda z} x_0\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{L}{\lambda z} (x_0 + f_0 \lambda z)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{L}{\lambda z} (x_0 - f_0 \lambda z)\right] \right\}^2$$

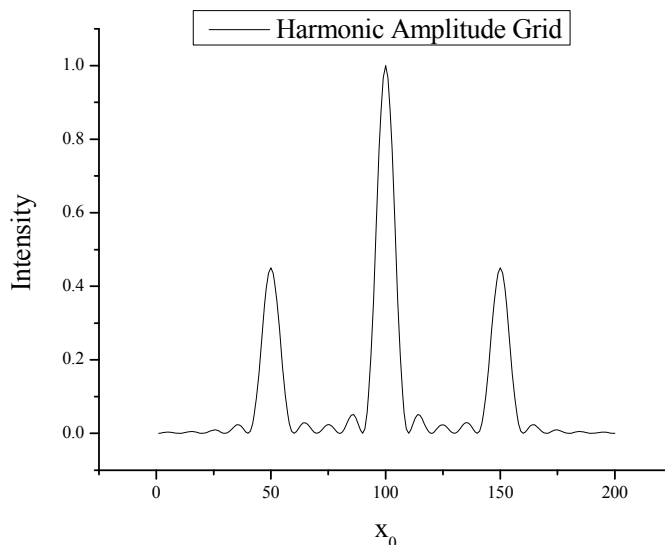
Ако е изпълнено условието за стойността на пространствената честота $f_0 \gg \frac{2}{L}$,

то смесените произведения в големите скоби имат пренебрежимо малка стойност и с добра точност може да се твърди, че интензитетът е равен на

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{L^2}{2\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{L}{\lambda z} y_0\right) \times$$

$$\times \left\{ \text{sinc}^2\left(\frac{L}{\lambda z} x_0\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{L}{\lambda z} (x_0 + f_0 \lambda z)\right] + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{L}{\lambda z} (x_0 - f_0 \lambda z)\right] \right\}$$

Извод: Хармоничният характер на пропускането на решетка води до преразпределение на енергията в три дифракционни порядъка. Централният максимум се нарича нулев дифракционен порядък. Симетрично около него са разположение +1 и -1 порядъци. (до същият резултат би довела и решетка моделирана с функцията \sin).



Фиг. 3.6

Тези изводи, които се базират на скаларната теория за дифракция, са валидни, когато $f_0 \ll \frac{1}{\lambda}$. Разстоянието между съседните максимуми е $T = f_0 \lambda z$, а ширината на всеки един от тях е $\Delta = \lambda z / L$. Разделителната способност на решетката, дефинирана като $r = \frac{T}{\Delta}$ (или колко дифракционни порядъка биха се поместили в един период) се равнява на

$$r = \frac{f_0 \lambda z}{(\lambda z / L)} = f_0 L = \frac{L}{T_0} = N,$$

или, броят N на периодите $T_0 = f_0^{-1}$ на решетката, които се поместват в апертурата L на решетката.

3.5.4 Кръгъл отвор

Тази задача притежава осева симетрия. Следователно, необходимо е да бъде приложено преобразуванието на Фурие върху осево симетрични функции.

Нека функцията $g(x, y)$ да има осева симетрия. Зададена в полярни координати тя има вида $g(r, \theta) = g_R(r)$. Тогава Фурие спектъра на функцията $g(x, y)$, който в декартови координати има вида

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[i2\pi(ux + vy)] dx dy ,$$

може да бъде преобразуван от декартови в полярни координати чрез смяната на променливите

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \rho &= \sqrt{u^2 + v^2} \\ x &= r \cos \theta, & u &= \rho \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta, & v &= \rho \sin \varphi \\ \theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \varphi &= \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right) \end{aligned}$$

и $FT\{g\} = G(\rho, \varphi)$ е Фурие образа на функцията $g(x, y)$ в полярни координати.

$$\begin{aligned} G(\rho, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r dr g_R(r) \exp[i2\pi r \rho (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)] = \\ &= \int_0^{\infty} g_R(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \exp[i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] = G(\rho) \end{aligned}$$

Тогава, ако си припомним дефиницията на Беселовата функция от първи род и от n -ти ред

$$J_n(z) = \frac{i^{(-n)}}{z} \int_0^{2\pi} \exp(iz \cos \theta) \exp(in\theta) d\theta ,$$

то

$$G(\rho, \varphi) = G(\rho) = \operatorname{Ha}\{g_R(r)\} = 2\pi \int_0^{\infty} g_R(r) J_0(2\pi r \rho) r dr .$$

Фурие образа на функция с осева симетрия сам притежава осева симетрия. Този специален случай на ФП се нарича *Фурие – Беселова трансформация* или *Ханкелова трансформация от нулев порядък*. За нея важат всички известни свойства на ФП.

Нека разгледаме дифракция на Фраунхофер от кръгла апертура с диаметър L . Осевосиметричната прозоречна функция се означава като

$$t(r_1) = \operatorname{circ}\left(\frac{r_1}{L/2}\right) = \begin{cases} 1, & |r_1| \leq L/2 \\ 0, & |r_1| > L/2 \end{cases}$$

и с нея се описва амплитудната пропускливост на кръгла апертура. Ако r_0 е радиус – вектора в равнината на наблюдение, то ФП се заменя с Ханкеловата трансформация

$$U(r_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(i \frac{kr_0^2}{2z}\right) Ha\{U(r_1)\}$$

Полярният радиус в равнината на честотите е свързан с линейният радиус r_0 чрез зависимостта

$$\rho = \frac{r_0}{\lambda z} = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\lambda z}$$

Ако екранът, носещ кръглата апертура с диаметър L , е осветен с плоска, нормално падаща вълна с единична амплитуда, то

$$Ha\{U(r_1)\} = Ha\{t(r_1)\} = Ha\left\{\text{circ}\left(\frac{r_1}{L/2}\right)\right\} = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{2J_1(\pi L\rho)}{L\rho}$$

разпределението на амплитудата в далечната зона е

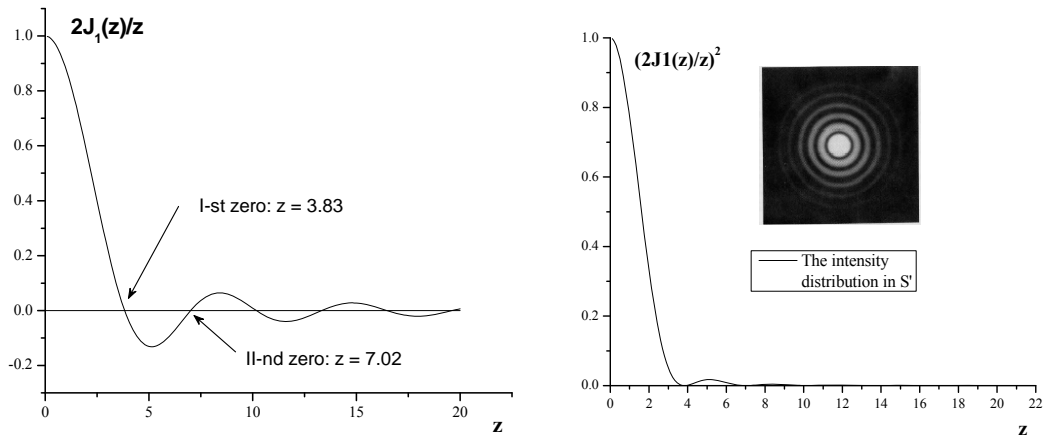
$$\begin{aligned} U(r_0) &= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(i \frac{kr_0^2}{2z}\right) \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{2J_1\left(\frac{\pi L r_0}{\lambda z}\right)}{\frac{L r_0}{\lambda z}} \right] = \\ &= \exp(ikz) \exp\left(i \frac{kr_0^2}{2z}\right) \left[\frac{kL^2}{i8z} \frac{2J_1\left(\frac{kL r_0}{2z}\right)}{\frac{kL r_0}{2z}} \right] \end{aligned}$$

а интензитетът в равнината на наблюдение, Фиг. 3.6, е

$$I(r_0) = \left(\frac{kL^2}{8z} \right) \left[\frac{2J_1\left(\frac{kL r_0}{2z}\right)}{\frac{kL r_0}{2z}} \right]^2 \text{ и се нарича картина на Ейри.}$$

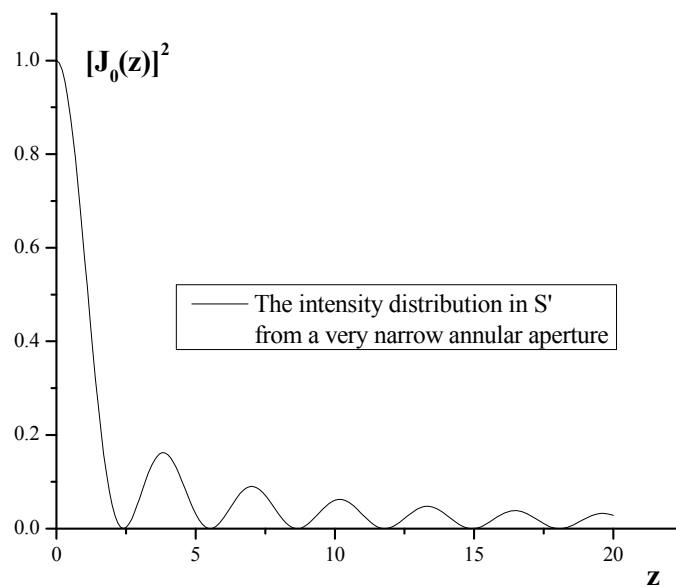
Функцията на Бесел от първи род е табулирана (виж например: *Abramowitz M. Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables 1972*). От стойността на аргумента за първата нула следва важното заключение, че радиусът на първата нула е

$$\Delta r_0 = 1.22 \frac{\lambda z}{L} .$$



Фиг. 3.6

По аналогичен път може лесно да бъде проверено, че ако апертурата на отвора има формата на тънък пръстен, то разпределението на интензитета на полето в равнината на наблюдение лежаща в далечната зона е различно от това при кръгла апертюра и има, примерно, вида, показан на Фиг. 3.7.



Фиг. 3.7

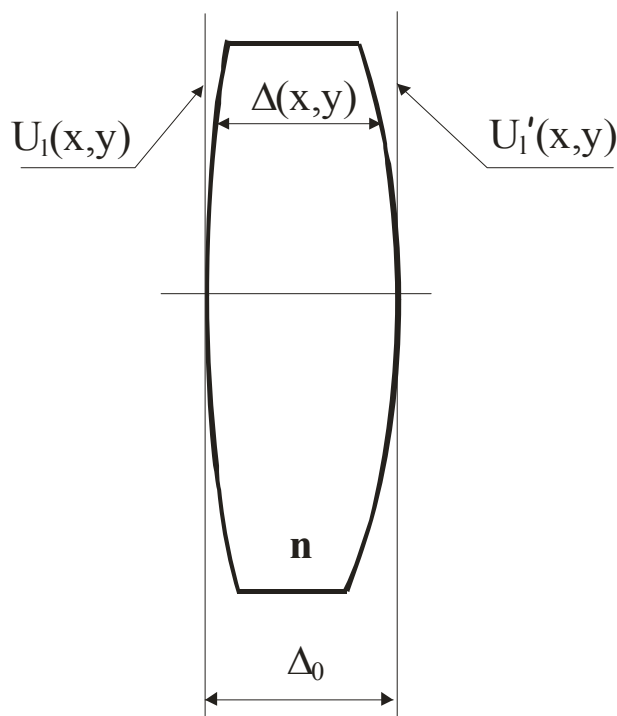
4. Фурие преобразуване в оптичните системи. Лещата като елемент, изпълняващ ФП и елемент, създаващ на образ

Оптичните лещи са едни от най-важните елементи на системите за формиране на образ. Техните изобразителни свойства могат да бъдат изведени от законите на геометричната оптика. Но при този подход се пренебрегват процесите на трансформация на вълновите фронтове и по-специално дифракцията върху апертурата на лещата. Отчитането на дифракционните ефекти помага процеса на изобразяване да бъде изучаван със средствата на вълновата физика, както и да отговори на въпроса защо лещата осъществява двумерно ФП.

4.1 Тънка леща като фазов елемент

Нека разгледаме работата на тънка леща. Ако предположим, че лещата наистина е тънка, то това ще означава, че входящ лъч, попаднал в точка (x, y) от едната повърхност на лещата, я напуска приблизително в същата точка от другата повърхност. Тъй като лещата, Фиг. 4.1, е изработена от материал (стъкло) с показател на пречупване n , то тя задържа фронта на вълната с величина, пропорционална на нейната оптическа дебелина в дадената точка $n\Delta(x, y)$, където $\Delta(x, y)$ е споменатата дебелина. Закона за изменение на фазата след преминаването на монохроматичната вълна през лещата е

$$\varphi(x, y) = k \sum_j (n_j L_j) = k [\Delta_0 - \Delta(x, y)] + kn\Delta(x, y)$$



Фиг. 4.1

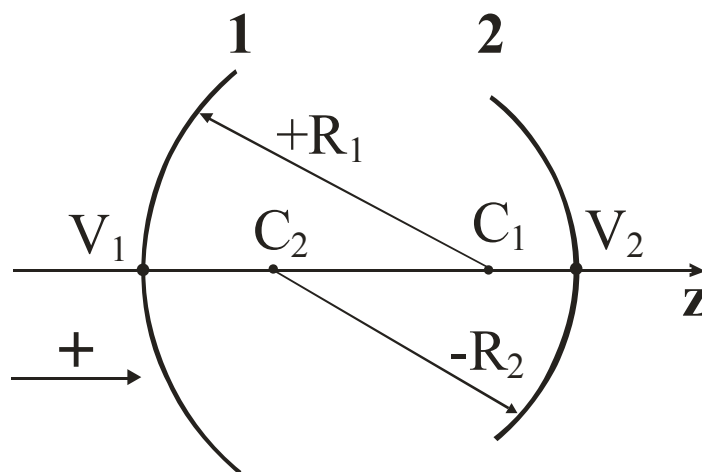
Следователно, лещата може да бъде разглеждана като екран, с комплексен коефициент на амплитудна пропускливост, равняващ се на

$$t_l(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)] = \exp(ik\Delta_0)\exp[ik(n-1)\Delta(x, y)] \quad /4.1/$$

Комплексната амплитуда $U_l'(x, y)$ в точка (x, y) , в равнина, разположена непосредствено зад лещата, е равна на произведението

$$U_l'(x, y) = t_l(x, y)U_l(x, y) \quad /4.2/$$

Преди да бъде разгледано преобразуването на фазов вълнов фронт от тънка леща ще бъде въведено правилото за знаците на радиусите на кривина, показано схематично на Фиг. 4.2, което правило осигурява независимост на резултатите от вида на сферичните повърхности.



Фиг. 4.2

Правило за знака на радиуса на кривина:

Радиусът на кривина R се измерва от върховата точка V към центъра на кривина C . Ако посоката на измерване съвпада с посоката на разпространение на светлината, положителната ос z , то този радиус е положителен.

Нека, например, бъде зададена двойноизпъкнала леща и нека тя бъде мислено разделена с равнина, перпендикулярна на оптичната ос, на две части (на Фиг. 4.3 е показана само лявата половина от нея). Текущата дебелина на тънката леща в точка (x, y) , намираща се на височина $h = \sqrt{x^2 + y^2}$ над оптичната ос, е равна на

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y)$$

Тази дебелина се разпределя между двете части на лещата. Тогава

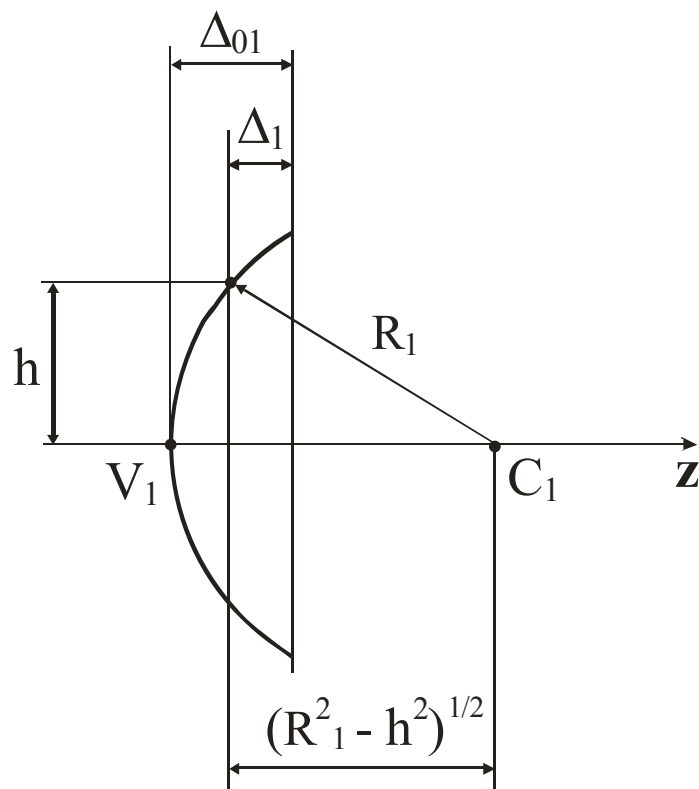
$$\Delta_1(x, y) = \Delta_{01} - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)} \right) = \Delta_{01} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{R_1^2}} \right)$$

Аналогично, за дебелина $\Delta_2(x, y)$ на втората половина (съгласно направения избор, радиусът R_2 е отрицателен)

$$\Delta_2(x, y) = \Delta_{02} - \left(-R_2 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)} \right) = \Delta_{02} + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{R_2^2}} \right),$$

където от $\sqrt{R_2^2}$ се взема $-R_2$ (радикалът дава положително число, а при този избор на лещата радиусът е отрицателен).

Забележка: За да се убедим във верността на така направения избор на знака на R_2 , следва да се провери дали при $h \rightarrow 0$ дебелината на лещата правилно клони към осевата си стойност $\Delta_2 \rightarrow \Delta_{02}$.



Фиг. 4.3

Товава общата дебелина на тънката леща е равна на

$$\Delta(x, y) = \Delta_{01} + \Delta_{02} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{R_2^2}} \right)$$

Ако преминем към параксиалната област, където условията за дифракция на Фраунхофер са добре спазени,

$$\sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{R_{1,2}^2}} \approx 1 - \frac{(x^2 + y^2)}{2R_{1,2}^2}$$

ще получим, че дебелината на лещата на височина $h = \sqrt{x^2 + y^2}$ е равна на

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad /4.3/$$

От геометричната оптика е известно, че оптическата сила φ , респективно фокусното разстояние f , на тънка леща е свързана с показателя на пречупване и кривините на повърхнините със зависимостта

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n-1)(c_1 - c_2) = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Следователно

$$t_l(x, y) = \exp(ikn\Delta_0) \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] = \exp(ikn\Delta_0) \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right] \quad /4.4/$$

Този израз е в сила за всички видове лещи, тъй като радиусите R_1 и R_2 , съгласно правилото на знаците, приемат съответния знак, а това от своя страна се отразява и на знака на фокусното разстояние f .

Нека разгледаме физичния смисъл на израза (4.4). Как една леща действа на плоска, нормално падаща вълна? От (4.2) следва, че

$$U_l'(x, y) = \exp(ikn\Delta_0) \exp \left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] U_l(x, y) \quad /4.5/$$

Първият член води до константно фазово отместване, докато вторият член представлява в първо приближение разпределението на фазата на сферична вълна.

а). Ако $f > 0$ вълната се фокусира на разстояние f зад лещата, Фиг. 4.4. Лещата е положителна.

б). Ако $f < 0$, то вълната е разходяща и има източник в точка, лежаща на разстояние $-f$ пред лещата, Фиг. 4.5. Лещата е отрицателна.

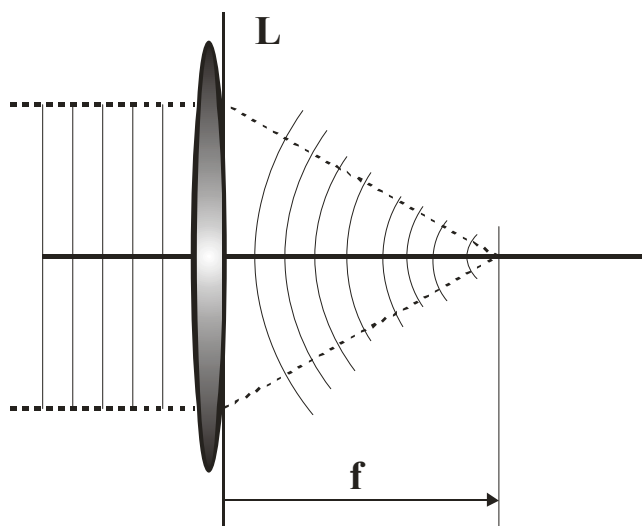
Изводът, до който достигнахме след направените разсъждения и който гласи, че леща със сферични повърхности преобразува падащата плоска вълна в сферична, е валиден само в параксиалното пространство.

Ако това приближение не е добре изпълнено, то в израза за фазата се появяват смесените произведения на координатите. Но отново, фазата на

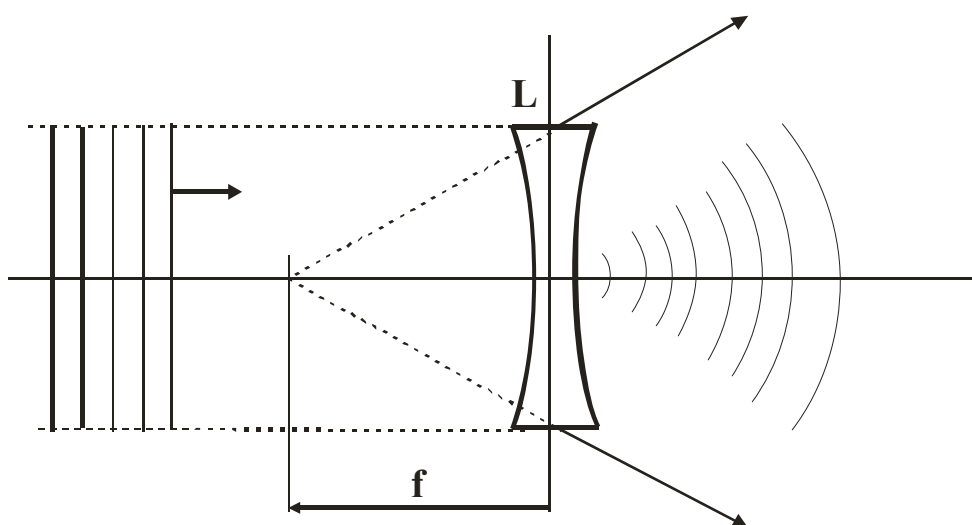
сферична вълна е обратно пропорционална на радиалното разстояние. За вълна , сходяща към точка $O(x_1, y_1)$ и лежаща на разстояние z , напречното разпределение на фазата е равно на

$$\varphi(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{1}{2z} (x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1) \right]$$

Този израз е валиден и за нашия случай, но на разстояние f , и то в приближение от първи порядък (Гудмен го нарича квадратичен), когато смесените произведения могат да бъдат пренебрегнати. Действително, ако точка $(0, 0, z)$ съвпада с фокалната точка, то $x_1 = y_1 = 0$. И естествено, не бива да се забравя, че при реалните оптични системи, вълновият фронт след лещата се различава от сферичната форма. Тази разлика между реалния вълнов фронт и идеалния сферичен фронт, изразена в оптичен път, се нарича вълнова аберация.



Фиг. 4.4



Фиг. 4.5

4.2 Лещата като елемент, осъществяващ преобразуване на Фурие

Нека разгледаме трите основни случая на взаимно разположение между дифракционния обект (екрана или предмета) и лещата.

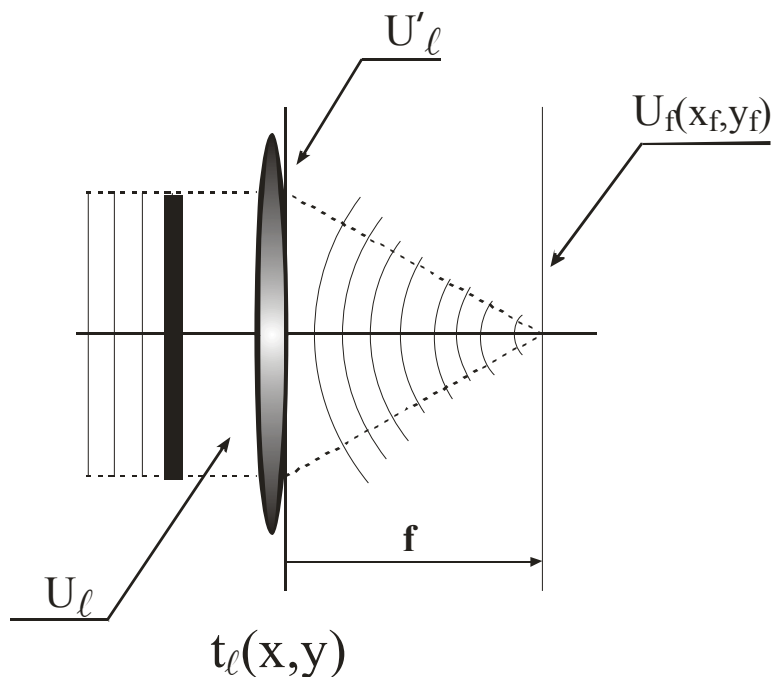
А). Предметът е разположен непосредствено пред лещата.

Равнинен предмет с амплитуден коефициент на пропускане $t_0(x, y)$ е разположен пред тънката леща L с фокусно разстояние f . Предметът е осветен с нормално падаща плоска монохроматична вълна с амплитуда A . Тогава комплексната амплитуда непосредствено зад предмета и попадаща пряко в апертурата на лещата, може да се запише като

$$U_l(x, y) = At_0(x, y)$$

Нека в този случай функцията $P(x, y)$ на зеницата на лещата (нейната апертурната функция) да има стойността

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in L \\ 0, & (x, y) \notin L \end{cases}$$



Фиг. 4.6

Тогава разпределението на комплексната амплитуда непосредствено зад лещата е равно на

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y) P(x, y) \exp\left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right] \quad /4.6/$$

Членът $\exp(ikn\Delta_0)$, който води до константно фазово отместване е пропуснат, тъй като не влияе върху крайния резултат. За да определим разпределението на комплексната амплитуда в задната фокална равнина, ще използваме приближението на Френел за $z = f$ и $x_1 = x$

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right]}{i\lambda f} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_l(x, y) \exp\left[i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] dx dy \quad /4.7/$$

Ако заместим от (4.6) в (4.7) и съкротим квадратичните фазови множители, ще получим, че комплексната амплитуда на полето в образната фокална равнина на лещата се равнява на

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right]}{i\lambda f} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_l(x, y) P(x, y) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] dx dy \quad /4.7a/$$

Следователно, разпределението на комплексната амплитуда $U_f(x_f, y_f)$ в задната фокална равнина на лещата е пропорционално на Фурие образа на преминалата през лещата част от полето (ограничено, филтрирано от нейната апертура).

Ако физическият размер на предмета е по-малък от апертурата и също така $P(x, y) = 1$, то отчитайки, че $U_l(x, y) = At_0(x, y)$,

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A \exp\left[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right]}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] dx dy \quad \dots\dots\dots /4.8/$$

Амплитудата и фазата в точка (x_f, y_f) се определят от амплитудата и фазата на

Фурие компонентите на предмета с пространствени честоти $u = \frac{x_f}{\lambda f}$, $v = \frac{y_f}{\lambda f}$. В

повечето случаи от практически интерес от значение е разпределението на интензитета на полето във фокалната равнина. Тогава квадратичният фазов множител отпада и

$$I_f(x_f, y_f) = |U_f(x_f, y_f)|^2 = \frac{A^2}{(\lambda f)^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x, y) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] dx dy \right|^2$$

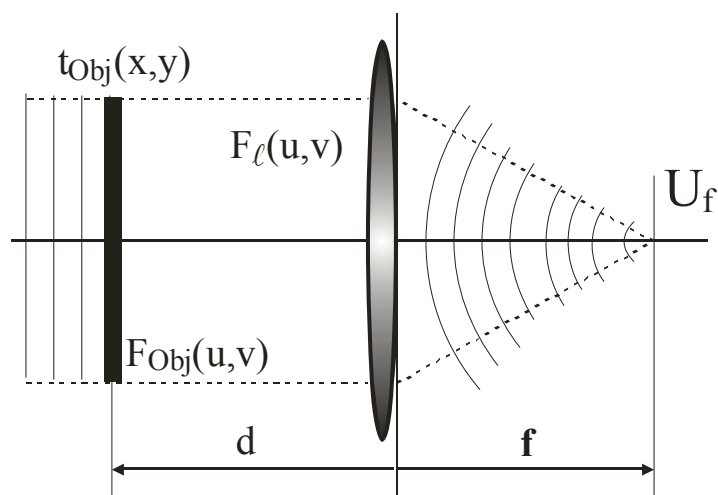
Б). Предметът е разположен на разстояние d_0 пред лещата.

Нека $F_{Obj}(u, v)$ да бъде Фурие спектъра на пропуснатото от предмета падащо поле с амплитуда A , а $F_l(u, v)$ да бъде Фурие спектъра на полето, което пада върху лещата. Или

$$F_{Obj}(u, v) = FT\{At_{Obj}(x, y)\} \text{ и } F_l(u, v) = FT\{U_l(x, y)\}.$$

Нека предположим, че при разпространението на вълната на разстояние d е валидно приближението на Френел. Тогава можем да пишем, че

$$F_l(u, v) = F_{Obj}(u, v) \exp\left[i\pi\lambda d(u^2 + v^2)\right], \quad /4.9/$$



Фиг. 4.7

което е в съответствие с формула (3.14) от Глава 3, където пространствените честоти в равнината на лещата са равни на $u = \frac{x_l}{\lambda d}$, $v = \frac{y_l}{\lambda d}$. Ако не се отчита влиянието на апертурата на лещата, то функцията на зеницата е равна на $P(x, y) = 1$ и от (4.7a) следва, че

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{\exp\left[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right]}{i\lambda f} F_l\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) \quad /4.10/$$

където $F_l\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right)$ е Фурие образът на падащото върху лещата поле. Ако заместим от (4.9) в (4.10), ще получим

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{\exp\left[i \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d}{f}\right) (x_f^2 + y_f^2)\right]}{i\lambda f} F_{Obj} \left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f} \right)$$

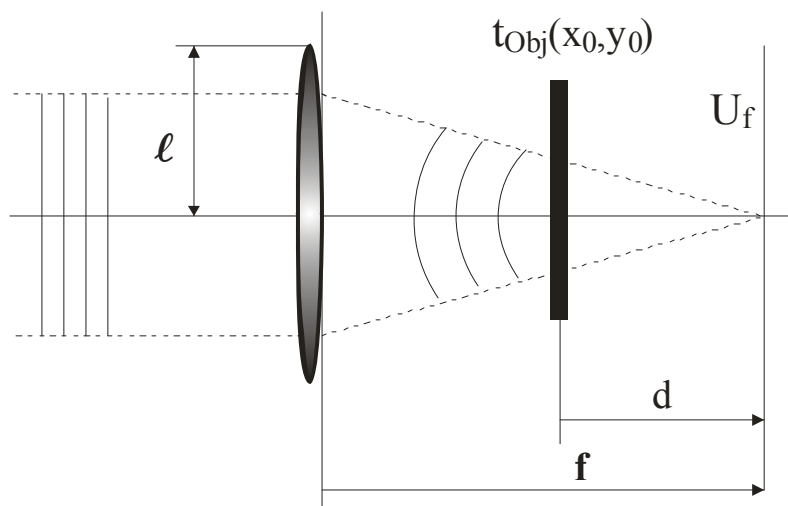
или

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A \exp\left[i \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d}{f}\right) (x_f^2 + y_f^2)\right]}{i\lambda f} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_{Obj}(x_0, y_0) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (x_0 x_f + y_0 y_f)\right] dx_0 dy_0 \quad /4.11/$$

В частният случай, когато $d = f$, във фокалната равнина се наблюдава точно Фурие преобразуване на предмета (транспаранта). Фазовото изкривяване, свързано с квадратичния член, изчезва.

В). Предмет, разположен зад лещата.

Тънка леща е осветена от плоска монохроматична вълна с амплитуда A . Върху плосък предметът, с коефициент на пропускане $t_{Obj}(x_0, y_0)$ и разположен на разстояние d пред образната фокална равнина ($d \leq f$), пада сферична вълна, сходяща към образната фокална точка (отново нека предположим, че оптичната система е положителна. Разсъжденията са валидни и за отрицателна система).



Фиг. 4.8

Съгласно геометричната оптика, амплитудата на сферичната вълна, която пада върху предмета е $A \frac{f}{d}$. От предмета е осветена само областта, ограничена от падащия конус лъчи, чийто връх лежи във фокалната точка. Ако радиусът на апертурата на лещата (на основата на светлинния конус) е l , то от подобие на триъгълниците следва

$\frac{f}{l} = \frac{d}{x_0}$ и, че $x_0 = \frac{dl}{f}$ е радиуса на осветената кръгова област от предмета. Върху тази осветена област се проектира геометрически и апертурната функция на лещата. Ако координатите в равнината на лещата са x_l, y_l , то техните проекции в равнината (x_0, y_0) се определят от изразите $x_l = x_0 \frac{f}{d}$, $y_l = y_0 \frac{f}{d}$. Крайната по размер на осветената област от предмета има апертурната функция $P\left(x_0 \frac{f}{d}, y_0 \frac{f}{d}\right)$, която се нарича *ефективна апертурна функция*. А тъй като и самият предмет има своя апертурна функция, то ефективната апертюра в равнината на предмета следва да бъде произведението на апертурната функция на предмета с проекцията на апертурната функция на лещата.

При параксиално приближение за сферичен вълнов фронт, амплитудата на полето, пропуснато от предмета, е

$$U_{Obj}(x_0, y_0) = \frac{Af}{d} P\left(x_0 \frac{f}{d}, y_0 \frac{f}{d}\right) \exp\left[-i \frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right] t_{Obj}(x_0, y_0)$$

Така, въз основа на предположението, че във фокалната равнина на лещата има дифракция на Френел от предмета

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A \exp\left[i \frac{k}{2d}(x_f^2 + y_f^2)\right]}{i\lambda d} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_{Obj}(x_0, y_0) P\left(x_0 \frac{f}{d}, y_0 \frac{f}{d}\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f}(x_0 x_f + y_0 y_f)\right] dx_0 dy_0$$

Така отново, с точност до квадратичен фазов множител, разпределението на амплитудата във фокалната равнина е Фурие образ на предмета, ограничен от проекцията на апертурата на лещата. Този резултат на практика съвпада със случая А), формула (4.7а).

При този експеримент е възможно да се контролира мащаба на Фурие образа, защото при увеличаване на d пространствения мащаб расте също, докато не се достигне до $d = f$. Когато d намалява, мащаба на образа също намалява. Този факт се прилага при пространствената филтрация.

4.3 Лещата като елемент, създаващ на образ

Основната функция на лещите е формирането на образ. Ако предмет е разположен в дадена равнина и е осветен с подходящ източник, след като полето, дифрактирало върху предмета премине през лещата, и достигне до друга равнина, наречена образна равнина, при определени условия, там може да се наблюдава разпределение на комплексната амплитуда, или съответно на интензитета на полето, пропорционални на същите величини в равнината на предмета. Образът на един предмет е *действителен* (реален), когато се формира от сходящ сноп. Реалният образ може да бъде наблюдаван върху екран. Когато образът се формира от разходящ сноп, той се нарича *недействителен* (нереален,

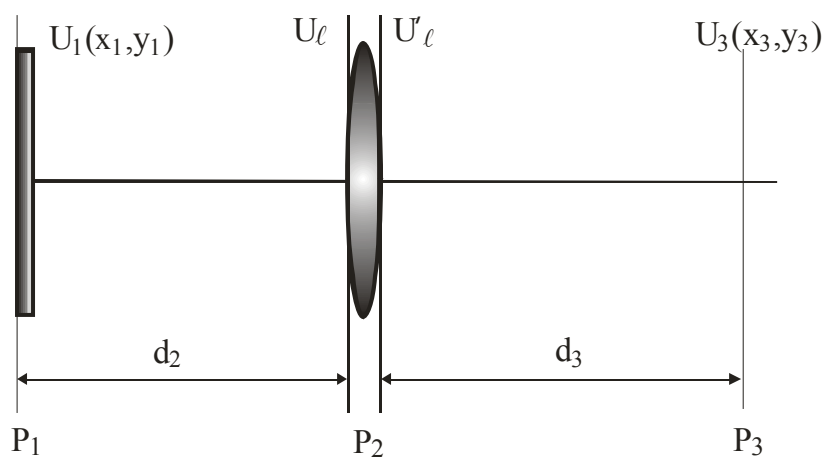
мним). Недействителният образ не може да бъде наблюдаван върху екран. Неговото местоположение се намира след продължаване до пресичане на лъчите, напуснали лещата.

Забележка: Естествено е да се предполага, че на всяка вълна (а от там и всеки вълнов фронт) отговаря определен източник. Ако тази примарна вълна премине през среда, която внася определени амплитудни и фазови изменения, новата, секундарна вълна ще има вече нов източник и казваме, че средата е създавала образ на примарния източник. Ако тази примарна вълна се разпространява във вакуум, източника остава постоянен. Така всяка оптична среда е в действителност *образотворна*. Включително и вакуума, който изобразява примарния източник в самия него.

Нека разгледаме процеса на монохроматично изобразяване на предмет в параксиалното пространство на свободна от aberации тънка леща (там е изпълнено условието за Фраунхоферова дифракция). Това ограничение означава, че системата, създаваща образ, е линейна и инвариантна относно комплексната амплитуда на полето.

A). Условие за формиране на образ

Плосък предмет е разположен в равнината (x_1, y_1) , на разстояние d_2 пред положителна леща и е осветен с монохроматична светлина.



Фиг. 4.9

Комплексната амплитуда на полето, непосредствено след предмета е $U_1(x_1, y_1)$, Фиг. 4.9. Необходимо е да бъдат установени условията, при които има основание да се счита, че разпределението на полето $U_3(x_3, y_3)$ е точно пропорционално на разпределението $U_1(x_1, y_1)$ на полето в равнината на предмета, или, то е негов образ. От линейния характер на разпространението на вълните от една равнина до следващата, $U_3(x_3, y_3)$ може да бъде представена като интеграл на суперпозиция

$$U_3(x_3, y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_3, y_3; x_1, y_1) U_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1 ,$$

където $h(x_3, y_3; x_1, y_1)$ е амплитудата в точка (x_3, y_3) , създадена от точков източник, разположен в точка (x_1, y_1) . Припомняме, че импулсната реакция $h(x_3, y_3; x_1, y_1)$, стига да може да бъде определена аналитично, напълно описва свойствата на системата.

За да бъде постигнато *изобразяване с високо качество* от страна на лещата, полето $U_3(x_3, y_3)$ трябва да се отличава от $U_1(x_1, y_1)$ възможно най-малко. Или казано на езика на математиката, *импулсната реакция трябва да се доближава до стойността*

$$h(x_3, y_3; x_1, y_1) \rightarrow K \delta(x_3 \pm Mx_1, y_3 \pm My_1) \quad /4.12/$$

където K е комплексна константа, а M е напречното увеличение на системата. Знаците \pm показват дали образът е изправен или обърнат. Така, *равнина на образа* се нарича тази равнина, в която условието (4.12) е изпълнено най-добре.

Б). Операторен метод за пресмятане на оптични системи

Процесът на изобразяване със системата, показана на Фиг. 4.9, може да бъде описан с един по-общ метод. Преобразуването на комплексната амплитуда на вълната от U_1 до U_3 се осъществява на три стадия: разпространение през два интервала, d_2 и d_3 , от свободното пространство и един преход през леща. В общия случай оптичната система може да съдържа и други елементи, например, пространствен модулатор или пространствен детектор и др. На всеки един елемент или процес на разпространение съответства оператор, описващ трансформацията на светлинната вълна. Сложна система от лещи може да бъде анализирана, ако отделните оператори бъдат подредени и приложени в реда отговарящ на физическия процес в системата.

Операторът на пространствен транспарант или отражател (напр. модулатор) има прост вид, тъй като изходното поле се получава от умножението на входното поле с комплексното разпределение на пропускането (отражението)

$$U_1(x_1, y_1) = U_0(x_1, y_1) t(x_1, y_1) , \text{ където } t(x_1, y_1) = t_0(x_1, y_1) \exp[i\varphi(x_1, y_1)] .$$

Операторите на лещите и на *свободното пространство* имат по-сложна форма. Както бе изведено, *пропускането на тънка леща*, с точност до постоянен множител, се описва с функцията

$$t(x, y) = \exp\left[-i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right] \quad /4.13/$$

в равнина (x, y) непосредствено след лещата. От друга страна, при анализа на дифракцията на светлината, за *преминаване през свободното пространство* в координатната област беше изведена функция на импулсен отклик

$$h(x, y) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i \frac{k}{2d}(x^2 + y^2)\right], \quad /4.14/$$

за свободно пространство с дължина d и отново с точност до фазов множител $\exp(ikd)$.

Ако обобщим казаното, от анализа на трансформацията на входната комплексна амплитуда в координатната област следва, че полето на изхода от тънка лещата се получава чрез умножаване на входната амплитуда с функцията на пропускане (4.13), а полето след преминаване през свободното пространство, чрез конволюция на входната амплитуда с функцията на импулсен отклик (4.14).

Двата израза са много сходни и могат да бъдат записани в една функция с общ вид

$$\psi(x, y; p) = \exp\left[i \frac{\pi p}{\lambda}(x^2 + y^2)\right] \quad /4.15/$$

където p е произволен параметър. Тогава преминаването през сферична леща се описва от

$$U_l' = \psi^*(x, y; F) U_l, \quad \text{където } F = \frac{1}{f}, \quad /4.16/$$

а вълната, преминала през свободното пространство с дължина d се описва с конволюцията

$$U_2(x_2, y_2) = U_1(x_1, y_1) ** \frac{iD}{\lambda} \psi(x_2, y_2; D), \quad \text{където } D = \frac{1}{d}. \quad /4.17/$$

Така функцията $\psi(x, y; p)$ може да бъде разглеждана като единен оператор, описващ преминаването на светлинна вълна както през леща, така и през свободно пространство. Свободното пространство може да бъде разглеждано като тънка леща с фокусно разстояние $f \rightarrow \infty$.

В). Свойства на оператора на разпространение $\psi(x, y; p)$:

1. $\psi(x, y; p) = \psi^*(x, y; -p)$
2. $\psi(-x, -y; p) = \psi(x, y; p)$
3. $\psi(x, y; p_1) \cdot \psi(x, y; p_2) = \psi(x, y; p_1 + p_2)$
4. $\psi(x, y; p_1) \cdot \psi^*(x, y; p_2) = \psi(x, y; p_1 - p_2) = \psi^*(x, y; p_2 - p_1)$
5. $\psi(ax, ay; p) = \psi(x, y; a^2 p)$

$$6. \psi(x-u, y-v; p) = \psi(x, y; p)\psi(u, v; p)\exp\left[-i\frac{2\pi p}{\lambda}(ux + vy)\right]$$

$$7. \psi^*(x, y; 0) = 1, f \rightarrow \infty$$

$$8. \lim_{D \rightarrow \infty} D\psi(x, y; D) \rightarrow \delta(x, y), (\text{при } d \rightarrow 0).$$

Съотношението 7. отразява факта, че леща с безкрайно голямо фокусно разстояние, не изменя разпределението на полето. Докато свойство 8. означава, че безкрайно малко свободно пространство не предизвиква никаква дифракция, виж /4.17/.

Г). Изобразяване с идеална оптична система с неограничена апертура

С помощта на оператора $\psi(x, y; p)$ могат да бъдат описани и анализирани изобразителните свойства на оптичната системата, показана на Фиг. 4.9. Например, нека транспаранта, играещ ролята на предмет, да бъде осветен с плоска монохроматична вълна с единична амплитуда и нека с $U_1(x_1, y_1)$ бъде означено разпределението на амплитудата на полето в равнина непосредствено след транспаранта. Тогава $U_1(x_1, y_1) = t(x_1, y_1)$, където $t(x_1, y_1)$ е комплексният амплитуден коефициент на пропускане. Осветяването със сферична вълна от точков източник, разположен на разстояние d_1 се описва с амплитудата

$$U_1(x_1, y_1) = \psi^*(x, y; D_1)t(x_1, y_1)$$

където, съгласно (4.15), $\psi^*(x, y; D_1) = \exp\left[-i\frac{\pi D_1}{\lambda}(x_1^2 + y_1^2)\right]$ е фазовия множител на сферичната вълна. В зависимост от знака на d_1 вълната може да бъде разходяща или сходяща. Ако проследим хода на светлината, ще получим последователно стойностите на комплексната амплитуда на всеки етап на преобразуване

а). преминаване през първото свободно пространство с разстояние d_2 , (4.17),

$$\begin{aligned} U_l(x_2, y_2) &= \frac{iD_2}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(x_1, y_1)\psi(x_2 - x_1, y_2 - y_1; D_2) dx_1 dy_1 = \\ &= \frac{iD_2}{\lambda} \iint_{(P_1)} U_1(x_1, y_1)\psi(x_2, y_2; D_2)\psi(x_1, y_1; D_2)\exp\left[-i\frac{2\pi D_2}{\lambda}(x_2x_1 + y_2y_1)\right] dx_1 dy_1 \end{aligned}$$

..... /4.18/

където бе приложено свойство 6.

б). преминаване през лещата с оптична сила F , (4.16),

$$U_l'(x_2, y_2) = U_l(x_2, y_2)\psi^*(x_2, y_2; F) = U_l(x_2, y_2)\psi(x_2, y_2; -F) \quad /4.19/$$

в). преминаване през второто свободно пространство с разстояние d_3

$$U_3(x_3, y_3) = \frac{iD_3}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_1'(x_2, y_2) \psi(x_3 - x_2, y_3 - y_2; D_3) dx_2 dy_2 =$$

$$= \frac{iD_3}{\lambda} \iint_{(P_2)} U_1'(x_2, y_2) \psi(x_3, y_3; D_3) \psi(x_2, y_2; D_3) \exp\left[-i \frac{2\pi D_3}{\lambda} (x_3 x_2 + y_3 y_2)\right] dx_2 dy_2$$

..... /4.20/

Сега за подинтегралната функция $U_1'(x_2, y_2)$ в израза (4.20) следва да се замести последователно с междинните стойности на амплитудите на полето от (4.19) и от (4.18). Прилагането на свойствата от 1. до 4. води до следния вид амплитудата на полето в изходната равнина на наблюдение

$$U_3(x_3, y_3) = -\frac{D_2 D_3}{\lambda^2} \psi(x_3, y_3; D_3) \iint_{(P_1)} \iint_{(P_2)} U_1(x_1, y_1) \psi(x_2, y_2; D_2 + D_3 - F) \times$$

$$\times \psi(x_1, y_1; D_2) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{\lambda} [x_2 (D_2 x_1 + D_3 x_3) + y_2 (D_2 y_1 + D_3 y_3)]\right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

..... /4.21/

За да бъде полето U_3 оптичен образ на полето U_1 , то неговото разпределение трябва да има същия вид. А дали равнината (P_3) е равнина на образа? За да бъде тя такава импулсният отклик на системата трябва да има вида (4.12). Съгласно формулата на Гаус за параксиално изобразяване в геометричната оптика, две точки са оптически спрегнати, когато техните линейните координати спрямо главните равнини и фокусното разстояние на лещата удовлетворяват зависимостта

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} = \frac{1}{f} \text{ или } D_2 + D_3 - F = 0.$$

(което не означава нищо друго, освен, че всички лъчи, излизащи от точка в равнината (P_1) на предмета, преминавайки през равнината на лещата (P_2) , се пресичат отново в една точка, лежаща в образната равнината (P_3) , в която полето е равно на U_3). Тогава, съгласно свойство 7., на оператора ψ , следва, че

$$\psi(x_2, y_2; D_2 + D_3 - F) = \psi(x_2, y_2; 0) = 1$$

и интегралът в равнината (P_2) се опростява до вида

$$\begin{aligned}
 & \iint_{(P_2)} 1 \cdot \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[x_2 (D_2 x_1 + D_3 x_3) + y_2 (D_2 y_1 + D_3 y_3) \right] \right\} dx_2 dy_2 = \\
 & = \left[1 \xrightarrow{FT} \delta(\nu) \right] = \delta \left(-\frac{D_2 x_1 + D_3 x_3}{\lambda}, -\frac{D_2 y_1 + D_3 y_3}{\lambda} \right) = \\
 & = \delta \left[-\frac{D_2}{\lambda} \left(x_1 + \frac{D_3}{D_2} x_3 \right), -\frac{D_2}{\lambda} \left(y_1 + \frac{D_3}{D_2} y_3 \right) \right] = \\
 & = \left[\delta(av) = \frac{1}{|a|} \delta(\nu) \right] = \left(\frac{\lambda}{D_2} \right)^2 \delta \left(x_1 + \frac{D_3}{D_2} x_3, y_1 + \frac{D_3}{D_2} y_3 \right)
 \end{aligned}$$

С така получения резултат нека заместим в уравнение (4.21)

$$\begin{aligned}
 U_3(x_3, y_3) &= -\frac{D_3}{D_2} \psi(x_3, y_3; D_3) \iint_{(P_1)} \psi(x_1, y_1; D_2) U_1(x_1, y_1) \times \\
 & \quad \times \delta \left(x_1 + \frac{D_3}{D_2} x_3, y_1 + \frac{D_3}{D_2} y_3 \right) dx_1 dy_1 = \\
 & = -\frac{D_3}{D_2} \psi(x_3, y_3; D_3) \psi \left(-\frac{D_3}{D_2} x_3, -\frac{D_3}{D_2} y_3; D_2 \right) U_1 \left(-\frac{D_3}{D_2} x_3, -\frac{D_3}{D_2} y_3 \right)
 \end{aligned} \tag{4.21a}$$

и след като приложим свойствата 5. и 3., получаваме

$$U_3(x_3, y_3) = -\frac{D_3}{D_2} \psi \left(x_3, y_3; D_3 + \frac{D_3^2}{D_2} \right) U_1 \left(-\frac{D_3}{D_2} x_3, -\frac{D_3}{D_2} y_3 \right).$$

В това равенство отношението $M = -\frac{D_2}{D_3} = -\frac{d_3}{d_2}$ е геометричното (параксиално) напречно увеличение на системата при изобразяване от равнината (x_1, y_1) в равнината (x_3, y_3) . Образът е увеличен (разтегнат) или умален (компресиран) в зависимост от стойността на M .

С оглед вида на интеграла в (4.21a), ако положим, че

$$h(x_3, y_3; x_1, y_1) = \frac{1}{M} \delta \left(x_1 + \frac{x_3}{M}, y_1 + \frac{y_3}{M} \right) = \delta(x_3 + Mx_1, y_3 + My_1) \tag{4.22/}$$

то непосредствено следва зависимостта

$$U_3(x_3, y_3) = \psi \left[U_1(x_1, y_1) ** h(x_3, y_3; x_1, y_1) \right].$$

Функцията $h(x_3, y_3; x_1, y_1)$, с точност до комплексна константа, изпълнява условието (4.12) за импулсна реакция на идеална системата, създаваща образ. Или, *импулсната реакция на идеална система е Дираков импулс.*

Разпределението на комплексната амплитуда на полето в равнината на образа се описва с функцията

$$U_3(x_3, y_3) = \frac{1}{M} U_1\left(\frac{x_3}{M}, \frac{y_3}{M}\right) \psi\left(x_3, y_3; D_3 + \frac{D_3^2}{D_2}\right) \quad /4.23/$$

израз, който е валиден само, ако е изпълнено условието на Гаус $D_2 + D_3 - F = 0$.

При наблюдение или измерване регистрираната величина е интензитета на полето

$$I_3(x_3, y_3) \sim U_3(x_3, y_3) U_3^*(x_3, y_3) = |U_3(x_3, y_3)|^2 = \left(\frac{1}{M}\right)^2 \left| U_1\left(\frac{x_3}{M}, \frac{y_3}{M}\right) \right|^2,$$

който е точно копие на предмета, тъй като винаги $|\psi\psi^*| = 1$.

Д). Изобразяване с дифракционно ограничена система с крайна апертура

Направените разсъждения се основаваха на предположението, че апертурната функция $P(x_2, y_2)$ е равна на единица в целия неограничен интервал $(-\infty, \infty)$. Само в този случай интегралните преобразувания, направени по-горе, имат смисъл. Физически това означава, че лещата L има безкрайни размери. В реалния случай на тънка леща с крайна апертура функцията на зеницата е равна на

$$P(x_2, y_2) = \begin{cases} 1 & : (x_2, y_2) \in L \\ 0 & : (x_2, y_2) \notin L \end{cases}.$$

Тогава, в параксиалната област, уравнение (4.21) има вида

$$U_3(x_3, y_3) = -\frac{D_2 D_3}{\lambda^2} \psi(x_3, y_3; D_3) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(x_1, y_1) \cdot \psi(x_1, y_1; D_2) \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2, y_2) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{\lambda} [x_2 D_3 (x_3 + Mx_1) + y_2 D_3 (y_3 + My_1)]\right\} dx_2 dy_2 \right\} dx_1 dy_1 \quad \dots\dots\dots /4.24/$$

Свойствата на така полученото разпределение на комплексната амплитуда в образната равнина могат да бъдат анализирани след като бъдат направени някои опростяващи допускания.

а). Нека положим $\tilde{x} = \frac{x_2 D_3}{\lambda} = \frac{x_2}{\lambda d_3}$, $x_2 = \lambda d_3 \tilde{x}$ и $\tilde{y} = \frac{y_2 D_3}{\lambda} = \frac{y_2}{\lambda d_3}$, $y_2 = \lambda d_3 \tilde{y}$.

При идеално оптично изобразяване е валидно приблизително следното равенство

$$\psi(x_1, y_1; D_2) \cong \psi\left(\frac{x_3}{M}, \frac{y_3}{M}; D_3\right),$$

тъй като принос в създаването на образа има само малка област около точката (x_1, y_1) на предмета. Това означава, че преразпределение на енергия в резултат на аберации не се наблюдава. Тогава в тази малка предметна област аргументът на оператора $\psi(x_1, y_1; D_2)$ не се променя съществено (измененията са в границите само на малка част от радиана) и горното приближение е валидно. Следователно, $\psi(x_1, y_1; D_2)$ може да бъде изнесена пред интеграла по променливите $dx_1 dy_1$. Отчитайки крайният размер на лещата, така както е записано в интеграла на суперпозиция /4.24/, за импулсната реакция

$$h = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2, y_2) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{\lambda} [x_2 D_3 (x_3 + Mx_1) + y_2 D_3 (y_3 + My_1)]\right\} dx_2 dy_2 \right\}$$

на системата, формираща образа, се получава

$$h(x_3, y_3; x_1, y_1) = (\lambda d_3)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_3 \tilde{x}, \lambda d_3 \tilde{y}) \times \exp\left\{-i2\pi [(x_3 + Mx_1) \tilde{x} + (y_3 + My_1) \tilde{y}]\right\} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad /4.25/$$

Следователно, ако е в сила формулата на Гаус за формиране на образ, вида на импулсната реакция на тънката леща съответства на разпределението на амплитудата на полето в околността на образната точка, $x_3 = -Mx_1$, $y_3 = -My_1$, след дифракция на Фраунхофер върху апертурата на лещата.

б). Сега нека положим $\tilde{x}_1 = -Mx_1$, $\tilde{y}_1 = -My_1$. Тогава

$$h(x_3, y_3; x_1, y_1) = (\lambda d_3)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_3 \tilde{x}, \lambda d_3 \tilde{y}) \times \exp\left\{-i2\pi [(x_3 - \tilde{x}_1) \tilde{x} + (y_3 - \tilde{y}_1) \tilde{y}]\right\} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad /4.26/$$

Импулсната реакция, в тази си форма, има вида на пространствено инвариантна величина, която зависи единствено от разликите $(x_3 - \tilde{x}_1)$, $(y_3 - \tilde{y}_1)$

$$h(x_3 - \tilde{x}_1, y_3 - \tilde{y}_1) = (\lambda d_3)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_3 \tilde{x}, \lambda d_3 \tilde{y}) \times \exp\left\{-i2\pi [(x_3 - \tilde{x}_1) \tilde{x} + (y_3 - \tilde{y}_1) \tilde{y}]\right\} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad /4.26a/$$

И, ако за простота на записа бъде въведена нормираната стойност на импулсния отклик $\tilde{h} = \frac{1}{(\lambda d_3)^2} h$, интегралът на суперпозиция описващ формирането на оптичния образ може да се представи така

$$U_3(x_3, y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x_3 - \tilde{x}_1, y_3 - \tilde{y}_1) \left[\frac{1}{M} U_1 \left(-\frac{\tilde{x}_1}{M}, -\frac{\tilde{y}_1}{M} \right) \right] d\tilde{x}_1 d\tilde{y}_1 \quad /4.27/$$

т.е. полето в равнината на образа е конволюция между импулсната реакция и полето на идеалния образ. Изразът в средните скоби на подинтегралната функция в /4.27/ представлява разпределението на полето в идеалния образ и може да бъде записано като (сравни с /4.23/)

$$U_G(x_3, y_3) = \frac{1}{M} U_1 \left(-\frac{x_3}{M}, -\frac{y_3}{M} \right). \quad /4.28/$$

Тогава

$$U_3(x_3, y_3) = \tilde{h}(x_3, y_3) ** U_G(x_3, y_3), \quad /4.29/$$

където импулсната реакция е

$$\tilde{h}(x_3, y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_3 \tilde{x}, \lambda d_3 \tilde{y}) \exp[-i2\pi(x_3 \tilde{x} + y_3 \tilde{y})] d\tilde{x} d\tilde{y} \quad /4.30/$$

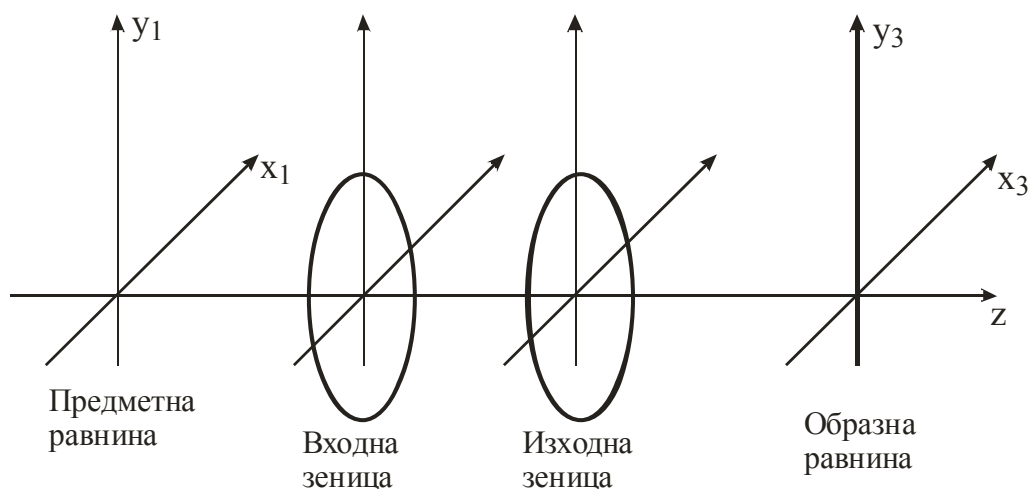
Заключение: При краен размер на апертурата на лещата, образът не може да бъде точно копие на предмета. Полученият образ е в известна степен изгладен, благодарение на конволюцията, тъй като реакцията \tilde{h} в този случай вече не е δ -функция. Това “изглаждане” може да премине в “замазване” на образа, когато фините детайли от структурата на предмета в образа изчезват.

Това заключение е в съответствие с теоремата за ентропията в теорията на информацията, която гласи:

Теорема: С трансформацията на информацията нейната ентропия нараства.

5. Честотен анализ на оптични системи

5.1 Обобщен модел на оптична система



Фиг. 1

До този момент предметът на разглеждане бе тънка леща. Сега нека разгледаме изобразителните свойства на съставна оптичната система, изградена от множество тънки лещи, положителни или отрицателни, и нека предположим, че тази системата изгражда действителен (реален) образ. Това предположение се прави единствено за удобство. Цялостната концепция на разглеждане и изводите, които ще бъдат направени, остават в сила и за отрицателни системи.

Всяка оптична системата може да бъде разглеждана като “черна кутия”. Тя се характеризира с четири основни равнини, Фиг. 1. Две от тях са равнините, съдържащи предмета и неговият образ. Другите две са тези, в които лежат входната и изходната апертура – входната и изходната зеница на системата. Зениците могат да бъдат както реални, така и ефективни, т.е. образ на някоя реална апертура в системата. Входната зеница ограничава апертурата на входящите снопове, а изходната на изходящите от системата снопове. Входната зеница е най-малката по диаметър от всички реални и виртуални апертури в предметното пространство, гледани от предметната точка. Тези апертури са образите на всички реални бленди в системата с оптичните повърхности, лежащи преди тях. Преместването на предметната точка може да доведе до смяна на входната зеница. Изходната зеница е образ на входната с цялата оптична система и също така, най-малката по диаметър от всички реални и виртуални апертури в образното пространство, гледани от образа на предметна точка. Споменатите апертури са в действителност множеството от реални бленди извън системата и образите на всички реални бленди, лежащи вътре в системата, изобразени с всяка от оптичните повърхности, лежащи пред или зад тях, съответно за предметното или образното пространство. Двете зеници на оптичната система са оптически спрегнати и напречното линейно увеличение между тях е една от основните характеристики на оптичната система. От казаното следва, че входната и изходната зеница са образи на една единствена, реална бленда в системата, която ограничава апертурите на обработваните от системата снопове. *Тази реална бленда се нарича апертурна бленда*. Нейното положение в оптичната системата оказва силно влияние върху нейното

цялостно корекционното състояние. Преместването на предметната точка може да доведе до смяна на входната зеница. Тогава друг отвор ще поеме ролята на апертурна бленда и това може да доведе до значително понижаване на качеството на образа. Оптичните системи се конструират за определено спрягане. Работата им в други режими не е гарантирана. Изключение от това правило правят *панкратичните системи* – системите с плавно променящо се фокусно разстояние, наричани още *вариообективи*. Но точно споменатият проблем е една от причините, поради които от панкратичните системи не може да се очаква високото качество на образа, както при системите с фиксирано спрягане.

Определение: Дифракционно ограничена система

Това е такава система, която преобразува всяка предметна сферична вълна във вълна, чийто фазов вълнов фронт се определя *единствено от дифракцията на входната сферична вълна върху изходната зеница* на оптичната система. В такава оптична система се предполага, че при всяко преминаване през отделен елемент или повърхност, входната сферична вълна се трансформира точно и единствено в сферична, тъй като системата не притежава каквито и да е било aberации. Изискване, което при центрираните системи от сферични повърхности не може да бъде спазено.

При реалните оптични системи това свойство е изпълнено само в ограничена, понякога твърде малка, област от предметната равнина (или от апертурата). Ако предметът не излиза извън тази област, то системата се държи като дифракционно ограничена, условие добре изпълнено в микроскопските системи, но не само там. Обикновено, изходящият вълнов фронт се различава съществено както от идеалния, от геометрична гледна точка, сферичен фронт, така и от идеалният дифракционен фронт. Разликата между идеалната сферична вълна с център в параксиалният образ (*Гаусова опорна сфера*) и реалната вълна, *преведена в оптичен път и измерена по протежение на реален лъч (а не параксиален), се нарича вълнова aberация.*

5.2 Дифракционни ефекти

Геометричната оптика, в чиято дефиниция е залегнало фундаменталното предположение $\lambda \rightarrow 0$, не допуска появата на секундарни дифракционни вълни и по този начин описва просто и лесно трансформацията на лъчевата енергия, т.е. на лъчите, при прехода им през оптична система. Ненулевата стойност на дължината на вълната води до поява на секундарни дифракционни вълни върху “всяка преграда, с размер от порядъка на дължината на вълната”. Което твърдение не е издържано от математическа гледна точка, както са показали още А. Зомерфелд, А. Рубинович и Маги. Според Такаши Сузуки, източник на секундарна дифракционна вълна е всяка точка от пространството, в която градиента на оптичната плътност е различен от нула.

Славният немски оптик Ернст Аббе е демонстрирал за първи път, че дифракционният спектър на структурата на предмета се филтрира от апертурата на входната зеница на оптичната система. Така, обеднялата от към пространствени честоти и дифрактира повторно върху изходната зеница на системата, вълна създава в областта на идеалният образ разпределение на комплексната амплитуда, подобно (в по-добрия случай) на това в областта на

предмета. За така изградения образ е характерно по-слабото (дори понякога клонящо към нула) присъствие на фините детайли.

Съгласно теорията на Аббе, дифракционните порядъци на предметната вълна се филтрират от апертурата на входната зеница. А съгласно теорията на Рейли, дифракционните ефекти се обуславят от апертурата на изходната зеница. Вторият подход бе използван от нас при изследването на изобразителните свойства на отделна тънка леща.

Отново можем да напишем, че комплексната амплитуда на полето в равнината на образа се описва с интеграл на суперпозиция

$$U_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_o(x_0, y_0) h(x_i, y_i, x_0, y_0) dx_0 dy_0 ,$$

където импулсният отклик $h(x_i, y_i, x_0, y_0)$ на системата описва разпределението на полето в точка (x_i, y_i) създадено от точков източник, лежащ в точка (x_0, y_0) . Разпределението $h(x_i, y_i, x_0, y_0)$ се създава от сферична вълна с ограничена от изходната зеница апертура и център в параксиалния образ. Двете системи координати са свързани с идеалната (параксиална) зависимост $x_i = Mx_0, y_i = My_0$, където напречното увеличение M може да бъде положителна или отрицателна величина.

При анализа на отделна тънка леща бе установено, че разпределението на светлината около точката $(x_i, y_i) \equiv (Mx_0, My_0)$ на идеалния образ се описва с дифракцията на Фраунхофер върху изходната апертура. Така, водени от интуицията, можем да твърдим, че за сложна, идеална и дифракционно ограничена оптична система функцията на импулсен отклик $h(x_i, y_i, x_0, y_0)$ има същият вид както при тънка леща, но умножена по комплексна константа, отразяваща преминаването на вълната (фазовото отместване в резултат от изминатия оптичен път) през отделните компоненти на системата. Функцията на амплитудна пропускливост на зеницата е равна отново на

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \text{Зеница} \\ 0, & (x, y) \notin \text{Зеница} \end{cases} .$$

Забележка: При реална аберирана система функцията на амплитудна пропускливост на зеницата е равна на

$$P(x, y) = \begin{cases} W(x, y), & (x, y) \in \text{Зеница} \\ 0, & (x, y) \notin \text{Зеница} \end{cases} ,$$

където комплексната функция от реални променливи $W(x, y)$ се равнява на

$$W(x, y) = |W(x, y)| \exp[i \arg W(x, y)] = \tau(x, y) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} w(x, y) \right] .$$

Функцията $w(x, y)$ е вълновата аберация на цялата оптична система, а $\tau(x, y)$ е функция описваща разпределението на загубите (поглъщането) по полето на апертурата.

Тогава импулсната реакция на системата е равна на

$$h(x_i, y_i, x_0, y_0) = \mathbb{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda d_i} [(x_i - Mx_0)x + (y_i - My_0)y] \right\} dx dy$$

Нека положим, че $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda d_i}$, $\tilde{y} = \frac{y}{\lambda d_i}$ и $\tilde{x}_0 = Mx_0$, $\tilde{y}_0 = My_0$. Тогава

$$h(x_i, y_i, x_0, y_0) = \mathbb{C} (\lambda d_i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \exp \left\{ -i 2\pi [(x_i - \tilde{x}_0)\tilde{x} + (y_i - \tilde{y}_0)\tilde{y}] \right\} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

и аналогично на системата с една леща нека въведем нормираната реакция

$$\tilde{h} = \frac{1}{\mathbb{C} (\lambda d_i)^2} h \text{ и геометричния образ } U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \mathbb{C} (\lambda d_i)^2 U_0 \left(\frac{\tilde{x}_0}{M}, \frac{\tilde{y}_0}{M} \right).$$

Тогава

$$U_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) h(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0, \quad /5.1/$$

а

$$\tilde{h}(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \exp[-i 2\pi (x_i \tilde{x} + y_i \tilde{y})] d\tilde{x} d\tilde{y} \quad /5.2/$$

Следователно, разпределението на амплитудата на полето в равнината на образа е конволюция между идеалният геометричен образ и импулсната реакция, която се определя от функцията на изходната зеница.

5.3 Кохерентна предавателна функция на дифракционно ограничена система

Когато предмета е осветен с кохерентна светлина, оптичната система е линейна система относно комплексната амплитуда на електромагнитното поле, но нелинейна относно неговия интензитет. Докато при осветяване с некохерентна светлина, системата е линейна спрямо интензитета на полето. Причината се корени в това, че при некохерентното осветяване всеки детектор реагира на усреднената във времето стойност на квадрата на модула на амплитудата на полето, т.е. на средната стойност на енергията попаднала върху него.

Формула (5.1) описва преобразуването на амплитудите в координатното пространство на една линейна инвариантна система. Тази система може да бъде напълно описана и с нейната предавателна функция. Ако означим с

$$G_g = FT\{U_g\}, G_i = FT\{U_i\} \text{ и } H = FT\{\tilde{h}\}, \text{ или}$$

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x_i, y_i) \exp[-i2\pi(ux_i + vy_i)] dx_i dy_i, \text{ то}$$

$$G_i(u, v) = H(u, v) G_g(u, v).$$

Функцията $H(u, v)$ се нарича *кохерентна предавателна функция* на оптичната система. Тя се означава най-често като *COTF* и описва в честотната област работата и свойствата на дифракционно ограничена система. Тъй като

$$\tilde{h}(x_i, y_i) = FT\{P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y})\}, \text{ то}$$

$$H(u, v) = FT\{\tilde{h}(x_i, y_i)\} = FT\{FT\{P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y})\}\}$$

и

$$H(u, v) = P(-\lambda d_i u, -\lambda d_i v) \quad /5.3/$$

тъй като

Теорема: Двукратното право ФП възстановява огледалния образ на предмета.

$$g(x) \xrightarrow{FT} G(u)$$

$$G(u) \xrightarrow{FT} g(-x)$$

Доказателство:

$$FT\{g(x)\} = G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i2\pi ux) dx$$

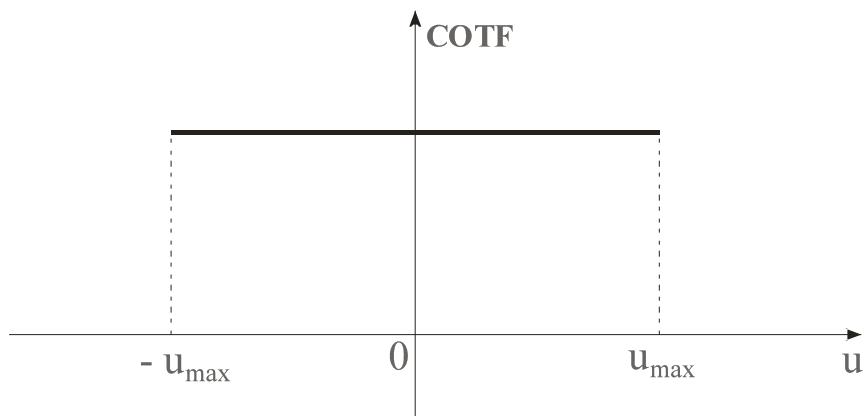
$$FT\{G(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i2\pi ux) dx \right] \exp(-i2\pi ux) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \exp(-i2\pi ux) du = g(-x)$$

Тъй като функцията на зеницата е равна на единица или нула, то и кохерентната предавателна функция $H(u, v)$ е също равна на единица или нула. Следователно, в честотната област дифракционно ограничена система има равномерна и ограничена лента на пропускане, Фиг. 5.2, вътре в която отделните Фурие компоненти се пропускат без изкривяване. При граничната честота пропускането се изменя със скок до нула и честотните компоненти извън тази област са напълно потиснати. Знакът минус в аргументите на COTF може да бъде избегнат със смяна на координатната система с нейната огледална.

Тогава кохерентната предавателна функция на системата се равнява на функцията на зеницата, записана в редуцирани координати

$$H(u, v) = P(\lambda d_i u, \lambda d_i v).$$



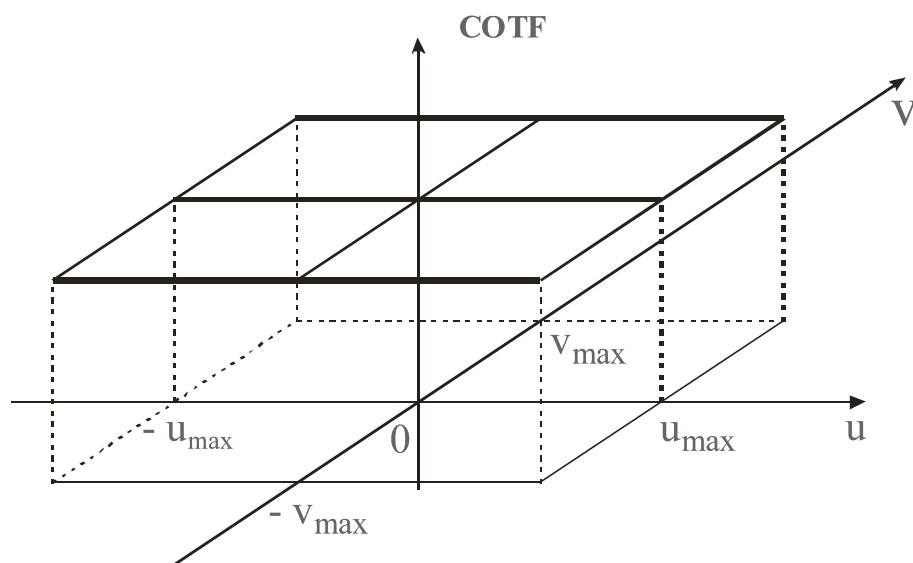
Фиг. 5.2

Примери:

1). Система с квадратна входна зеница със страна l

$$P(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right)$$

$$H(u, v) = \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i u}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i v}{l}\right).$$



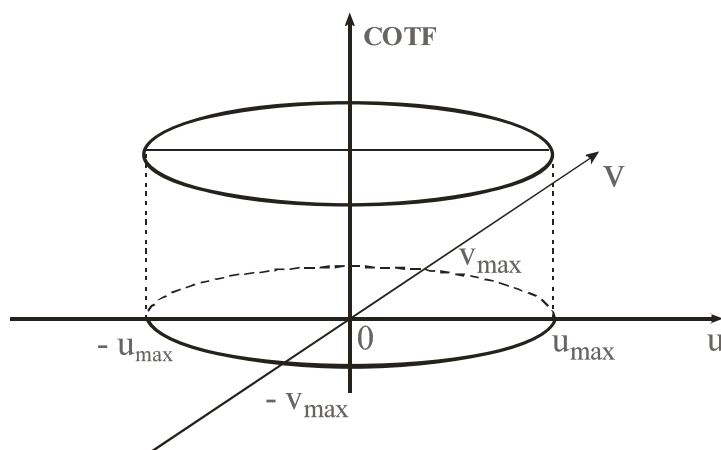
Фиг. 5.3

При квадратна зеница максималната граничната честота достига стойността $u_{\max} \sqrt{2}$.

2). Система с кръгла входна зеница с радиус r

$$P(x, y) = \text{circ} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \right)$$

$$H(u, v) = H(\rho) = \text{circ} \left(\frac{\lambda d_i \sqrt{u^2 + v^2}}{r} \right) = \frac{\lambda d_i}{r} \rho$$



Фиг. 5.4

При кръгла зеница, граничната честота u_{\max} е една и съща във всички посоки в честотната равнина.

Например, при $r = 2.10^{-2} \text{ m}$, $d_i = 0,1 \text{ m}$, $\lambda = 0,5.10^{-6} \text{ m}$ граничната честота на пропускане има стойността

$$u_{\max} = \frac{1}{2} \frac{r}{\lambda d_i} = \frac{2.10^{-2}}{2.0,1.0,5.10^{-6}} = \frac{1}{5} 10^6 \text{ m}^{-1} = 0,2.10^3 \text{ mm}^{-1} = 200 \text{ l/mm} .$$

Тъй като $\tilde{h} = FT^{-1}\{H\}$, нека определим импулсната реакция на оптична система с кръгла зеница. Нека си припомним, че

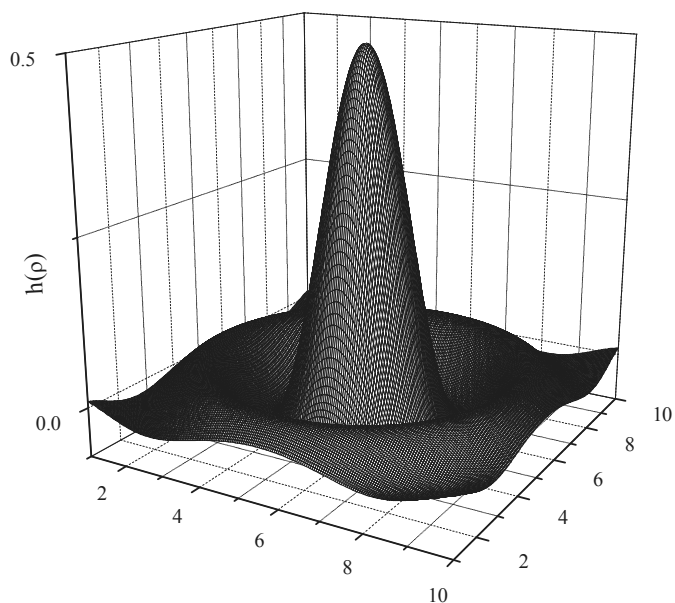
$$\text{circ}(Ar) \xleftrightarrow[FT^{-1}]{FT} \frac{1}{A^2} \frac{J_1(2\pi\rho/A)}{\rho/A} .$$

Тогава, ако $A = \frac{2\lambda d_i}{R}$, $r = \rho$, то

$$\tilde{h}(x, y) = FT^{-1}\{H(u, v)\} = \frac{R^2}{(2\lambda d_i)^2} \frac{J_1\left(2\pi \frac{R}{2\lambda d_i} r\right)}{\frac{R}{2\lambda d_i} r} = \tilde{h}(r)$$

Функцията в числителя $J_1(2\pi\rho)$ има кръгова симетрия и се нарича Беселова функция от първи род и от първи ред. Нейният централен максимум спада до нула при стойност на аргумента, равна на $\rho = 0,61$. Следователно,

$$\frac{R}{2\lambda d_i} r = 0,61 \quad \text{или при } r = 1,22 \frac{\lambda d_i}{R}.$$



Отново стигнахме до извода, че за дифракционно ограничена система при кохерентно осветяване, импулсната реакция се дава с формулата за дифракция на Фраунхофер върху изходната зеница. Това означава, че образът на всеки точков източник не е точка, а петно на разсейване. Той не се определя от сферична вълна, а от по-сложната по форма дифракционна вълна.

Литература

1. Born M., Wolf E., *Principles of optics*, Pergamon Press, NY, 1970.
2. Bracewell R., *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw Hill, NY, 1965, (3d Ed. 1989).
3. Papoulis A., *Systems and Transforms with Applications in Optics*, McGraw Hill, NY, 1968.
4. Goodman J.W., *Introduction to Fourier Optics*, 2nd Ed., McGraw Hill, NY, 1996.
5. Goodman J.W., *Statistical Optics*, John Wiley & Sons, 1985.
6. O’Neill E.L., *Introduction to Statistical Optics*, Addison – Wesley Pub. Co., 1963.
7. Klein M.V., *Optics*, John Wiley & Sons, 1970.
8. Hanna J. Ray, Rowland J. H., *Fourier Series, Transforms and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, 1990.
9. Stroke G.W., *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, 2nd ed., Academic Press, 1964.
10. Linfoot E.H., *Fourier Methods in Optical Image Evaluation*, Pitman Press, 1964.
11. Marechal A., Francon M., *Diffraction. Structure des Images*, Paris, 1960.
12. Haus H. A., *Waves and fields in optoelectronics*, Prentice-Hall, N.J., 1984.
13. Gaskill Jack D., *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*, John Wiley and Sons, 1978, ISBN 0471292885.